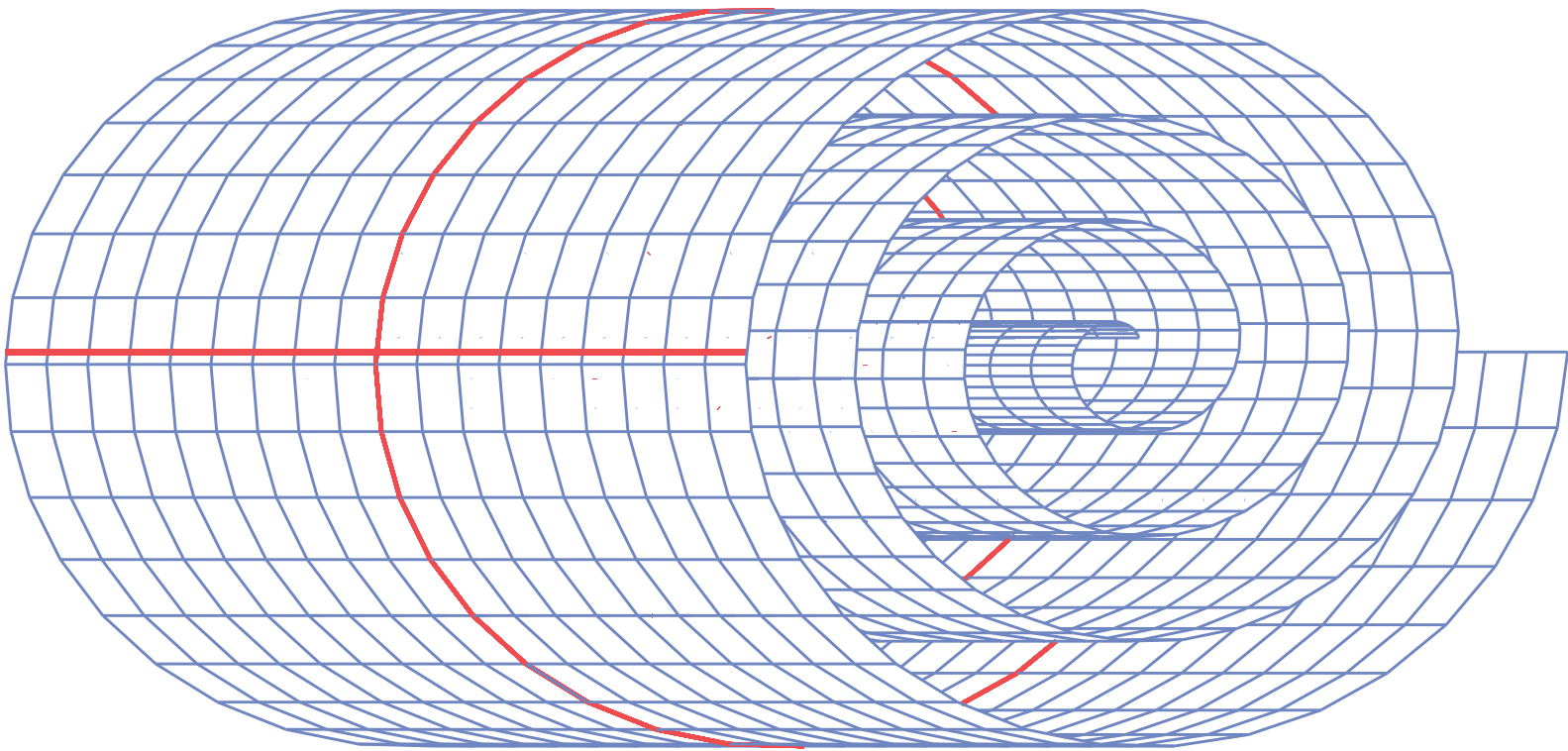


# 複素数

ver. 17.05.12





# はじめに

数学において‘変数を操作すること’と‘関数の考え’は多くの数学の技法の源であった。例えば、二次方程式の解を求めることは；変数を操作する‘ように我々を導いたし、また二次関数のグラフの特徴の理解から進んで変化する量を取り扱う時に；関数の考え’を通して、数学には微分積分学を始めとする多くの重要な進歩が生じた。複素数の考えは二次、三次方程式等の一般解を求める探求の中で生まれ、Carl Friedrich Gauss(1777~1855)、Jean Robert Argand(1768-1822)、Caspar Wesselなどがそれぞれ独立に発見した複素数の幾何的表示の考えの有効さによって成長した。Gaussは19才の時、正17角形の作図法をある17次方程式の複素数解を代数的に計算して示すことができた。複素数の考えを使うと、ユークリッド幾何学の中で定木とコンパスを使って正多角形を作図する問題のあるものは代数方程式の解を代数的に求める問題となることが見つかった。いわゆるユークリッド幾何学の3大作図不能問題として昔から知られている問題は

- I. 任意に与えられた角を3等分せよ（一般角の三等分問題）
- II. 任意に与えられた立方体に対し、その二倍の体積を持つ立方体を求めよ（Delosの神託）
- III. 任意に与えられた円と等面積の正方形を求めよ（円積問題）

であるが、これらの問題も対応する代数方程式の解を代数的に求める問題となり、19世紀の間に一般的には作図不能であることが証明されたのです。これらは、それまでの難問の解決を通して複素数の考えの有効さを明らかにするものであった。

複素数を話題とするこの講義では、実数として考えていた対象を複素数の範囲まで広げて考えることに導かれて、つぎのような数学的对象を取り扱う。

複素数の平面上の点としての幾何的意味づけを知り、平面の直線や円にかかわる問題に応用できるようになる。

複素数を通して、平面の上に体の構造が存在していることを知り、二次方程式や高次の代数方程式の複素数解の幾何的意味を知る。

ド・モアブルの公式を理解する。

代数学の基本定理の意味を知る。

複素数の数列や複素数の無限等比級数の和の計算などを通して、関数や方程式によって現される事象を考えると、複素数の考えが役に立つことを知る。

実数を変数とする指数関数と三角関数がオイラーの公式を通して結びつき、複素数 $z$ を変数とする指数関数と三角関数が考えられることを知る。

これらを踏まえて、複素数 $z$ を変数とする関数の複素微分そして複素積分の考えを知る。

この講義ノートに載っている図の多くは愛知教育大学数学教育講座の2004年度卒業生が卒業論文のために作成されたものです。協力に感謝します。

2004年から2010年に 著者

# 目次

第 1 章 複素数の幾何	1
1.1 複素数とは	1
1.2 複素数と不等式	4
1.3 複素数と多項式	7
1.4 複素数の指数関数	11
1.5 複素数と曲線	14
1.6 一次分数関数	17
1.7 複素対数	21
1.8 応用 オイラーの公式と微分方程式	24
第 2 章 複素関数	29
2.1 複素数列の収束と連続関数	29
2.2 複素微分可能性	33
2.3 等角写像性	40
2.4 線積分と Green の定理	48
2.5 複素積分	51
第 3 章 応用	59
3.1 写像の反復と収束	59
付録 A 収束について	65
付録 B 偏微分について	67
問題 略解	71
おわりに	90
関連図書	91
索引	92

# 第1章 複素数の幾何

## 1.1 複素数とは

虚数  $i$  を 2 乗して  $-1$  になる数を考えて、これを  $i$  で表し虚数単位という。  $i^2 = -1$  である。

実数  $a$  と  $b$  を使って  $a + ib$  の形で表される数を複素数という；  $a$  を  $a + ib$  の実部、  $b$  を  $a + ib$  の虚部という。複素数  $a + ib$  は  $a + bi$  とも表される。

複素数の相等の定義 :  $a + ib = c + id \iff a = c$  かつ  $b = d$ .

代数的演算の定義

加法 :  $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

減法 :  $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$

乗法 :  $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

除法 :  $c + id \neq 0 + i0$  のとき、  $\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

複素数体 複素数の全体を  $\mathbb{C}$  で表す。

複素数の代数的演算は次の性質を満たす:

複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  に対して、つぎにことが成り立っている:

- (1)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  交換法則
- (2)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  結合法則
- (3) 複素数  $0 + i0$  を  $0$  で表す。  $\alpha + 0 = \alpha$
- (4) 複素数  $\alpha = a + ib$  に対して、複素数  $-a + i(-b)$  を  $-\alpha$  と表す。そのとき  $\alpha + (-\alpha) = 0$
- (5)  $\alpha\beta = \beta\alpha$  交換法則
- (6)  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$  結合法則
- (7) 複素数  $1 + i0$  を  $1$  で表す。  $\alpha \cdot 1 = \alpha$
- (8) 複素数  $\alpha = a + ib \neq 0$  のとき、複素数  $\frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$  を  $\frac{1}{\alpha}$  と表す。そのとき  $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$
- (9)  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$  分配法則

注意。つぎのことが成り立つ:

$$\text{すべての複素数 } \alpha \text{ に対して } \alpha \cdot 0 = 0.$$

何故ならば、  $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$  が成り立たねばならないから、

$$\alpha \cdot 0 = \{\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0\} - \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 - \alpha \cdot 0 = 0.$$

が成り立っている。

複素数平面 複素数体に対して成り立っている性質(1)-(9)を見ると、それはすべて実数に対しても成り立っている性質である。実数は虚数部が0の複素数であることがわかる。実数の全体  $\mathbf{R}$  は数直線上に位置づけられるので、複素数を数直線を含む平面上に位置づけることが考えられる。平面上に原点と  $xy$ -座標系を考え、複素数  $a + ib$  を  $xy$  平面の点  $(a, b)$  に対応させ位置づけて考えるとよいことが Gauss(1777-1855) や Argand(1768-1822) によって発見された。

(複素数の幾何学的表現)

虚数部が0の複素数  $a + i0$  を実数  $a$  と同一視して、 $a$  と表すことにする。

$$a = a + i0 \quad (a \in \mathbf{R}) \quad (\text{複素数体 } \mathbf{C} \text{ は実数体 } \mathbf{R} \text{ の拡張である。})$$

実数部が0の複素数  $0 + ib$  を  $ib$  と表す - この形の複素数  $ib$  を純虚数という。

すべての純虚数  $i(-b) = 0 + i(-b) = -0 + i(-b) = -(0 + ib) = -ib$  であるから、

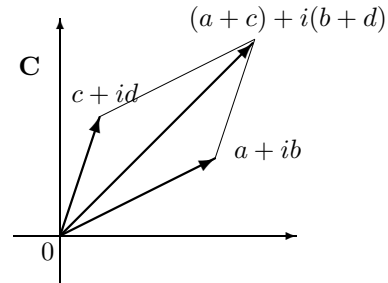
$$\text{複素数 } a + i(-b) = a - ib.$$

注意。 数学で普通に使われる記号として、正の整数の集合を  $\mathbf{N}$  で、またすべての整数の集合を  $\mathbf{Z}$  で表す。

複素数  $x + iy$  を座標平面  $\mathbf{R}^2$  の点  $(x, y)$  に対応させて考えるとき、複素数の加法の定義

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

から、複素数の和は平面上でのベクトル和に対応していることがわかる。



問題 1.1.1 つぎの複素数を計算しなさい。

$$(1) (1 + i)^{100} \quad (2) \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{99} \quad (3) \frac{2 + 9i}{1 + 2i}$$

複素数の極表示

偏角 すべての0でない複素数  $z = x + iy$  はその絶対値  $|z|$  と複素数の平面上で点0と点  $z$  を結ぶ線分  $0z$  が実軸となす角  $\theta$  によって決定される：

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (\text{極表示})$$

このとき、 $\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases}$  である。この角  $\theta$  を複素数  $z = x + iy$  の偏角といい  $\arg z$  で表す：

$$\arg z = \theta.$$

複素数  $z = x + iy$  の偏角  $\arg z$  の取り方には  $2\pi$  の整数倍の曖昧さがある，すなわち  $\theta_0$  が複素数  $z$  の偏角であるとすれば， $\theta_0 + 2n\pi$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) も複素数  $z$  の偏角である．

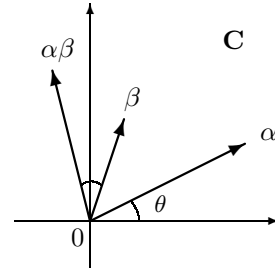
注意． $(-\pi, \pi]$  の範囲にとった (複素数  $z$  の) 偏角  $\Theta$  を偏角の主値といい  $\text{Arg } z$  で表す場合もある：  
 $\text{Arg } z = \Theta \quad (-\pi < \Theta \leq \pi)$  .

複素数の極表示は複素数の積の幾何学的意味を明らかにしてくれる：

複素数  $\alpha = |\alpha|(\cos \theta + i \sin \theta)$ ， $\beta = |\beta|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  に対して

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= |\alpha||\beta|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= |\alpha\beta| \{ \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) \} \end{aligned}$$

が成り立つ．複素数  $\alpha$  と  $\beta$  の積  $\alpha\beta$  は複素数  $\beta$  を  $|\alpha|$  倍した後で複素数  $\alpha$  の偏角  $\arg \alpha$  だけ原点  $0$  を中心に回転した複素数である．



ド・モアブル (de Moivre) の公式 複素数  $\cos \theta + i \sin \theta$  ( $\theta \in \mathbf{R}$ ) に対して，

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n \in \mathbf{Z})$$

が成り立つ．

証明 三角関数の加法定理を使って，数学的帰納法で証明しよう． $n = 1$  の場合は明らかである．

$n = 1, 2, \dots, N$  の場合には公式が成り立つと仮定すると， $n = N + 1$  の場合にも

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{N+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^N (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos N\theta + i \sin N\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos N\theta \cos \theta - \sin N\theta \sin \theta + i(\cos N\theta \sin \theta + \sin N\theta \cos \theta) \\ &= \cos(N+1)\theta + i \sin(N+1)\theta \end{aligned}$$

となり，公式が成り立つ．数学的帰納法の原理により，公式はすべての自然数に対して成り立つ．

さて  $n = 0$  の場合には，公式の両辺はともに  $1$  となり成り立つ． $n = -p < 0$  ( $p \in \mathbf{N}$ ) の場合には，一般に

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{-1} = \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

が成り立っていることに注意すると

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{-p} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^p} = \frac{1}{\cos p\theta + i \sin p\theta} \\ &= \cos(-p\theta) + i \sin(-p\theta) = \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

が成り立つ． //

問題 1.1.2 つぎの複素数を計算せよ：

$$(1) \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^6 \quad (2) \frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i} \quad (3) \left(\frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^3 \quad (4) \left(\frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^{2007}$$

問題 1.1.3 ド・モワブルの定理を使って、つぎの三倍角および五倍角の公式を示せ。

$$(1) \begin{cases} \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \\ \sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta \end{cases}$$

問題 1.1.4  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  ( $\theta \in \mathbf{R}$ ) とする。

- (1)  $z + \frac{1}{z}$  と  $z^n + \frac{1}{z^n}$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) を  $\theta$  を使って表せ。
- (2)  $\left(z + \frac{1}{z}\right)^5$  を  $z + \frac{1}{z}$ ,  $z^3 + \frac{1}{z^3}$ ,  $z^5 + \frac{1}{z^5}$  を使って表せ。
- (3)  $\cos^5 \theta$  を  $\cos \theta$ ,  $\cos 3\theta$ ,  $\cos 5\theta$  を使って表せ。
- (4)  $\sin^5 \theta$  を  $\sin \theta$ ,  $\sin 3\theta$ ,  $\sin 5\theta$  を使って表せ。

追加.  $\theta \in \mathbf{R}$  に対して,  $\cos^6 \theta = \frac{1}{32}(\cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10)$  を示せ。

## 1.2 複素数と不等式

複素数の実部と虚部 複素数  $z$  の実部や虚部はつぎのように表現される：

$$\begin{aligned} z = x + iy \quad \text{に対して,} \\ \text{実部 } x = \operatorname{Re} z \quad (= \Re z) \quad \text{および} \\ \text{虚部 } y = \operatorname{Im} z \quad (= \Im z) \quad \text{と表す.} \\ \text{明らかに, } \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{aligned}$$

共役複素数 複素数  $z = x + iy$  に対して 複素数  $x - iy$  を  $\bar{z}$  で表し  $z$  の共役複素数という。

$$\bar{z} = x - iy.$$

このとき

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w.$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

$$\overline{(\bar{z})} = z.$$



絶対値 複素数  $z = x + iy$  に対して 複素数  $\sqrt{x^2 + y^2}$  を  $|z|$  で表し  $z$  の絶対値という.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

このとき, 複素数  $\alpha, \beta$  に対して

$$\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Im} \alpha \leq |\alpha|$$

$$|\alpha| = |\bar{\alpha}| = \sqrt{\alpha \bar{\alpha}} = \sqrt{\bar{\alpha} \alpha},$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|,$$

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}.$$

三角不等式 複素数  $z, w$  に対して  $|z + w| \leq |z| + |w|$  が成り立つ.

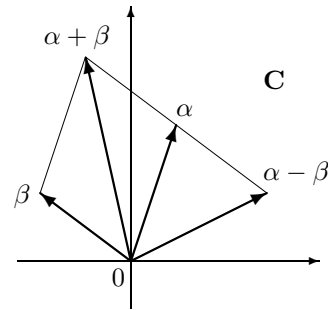
証明 つぎの計算から, 明らかにわかる:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w} + |w|^2 \quad (\because \bar{z}w = \overline{z\bar{w}}) \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \quad (\because \operatorname{Re} z\bar{w} \leq |z\bar{w}|) \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \quad (\because |z\bar{w}| = |z||w|) \\ &= (|z| + |w|)^2. \quad // \end{aligned}$$

問題 1.2.1 複素数  $\alpha, \beta$  に対して

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$$

が成り立つ (幾何学での中線定理と比較せよ).



複素関数の表現 複素数  $z$  に複素数  $w$  を対応させる関数を  $w = f(z)$  と表す. そのとき, 関数  $w = f(z)$  は複素数  $z$  の実部や虚部と複素数  $w$  の実部や虚部の関係によっても次のように表現される:

$$\begin{aligned}
z &= x + iy \\
w &= u + iv \\
u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) \quad (= \Re f(z)) \\
v(x, y) &= \operatorname{Im} f(z) \quad (= \Im f(z)) \\
f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\
f &= u + iv
\end{aligned}$$

例.  $f(z) = z^2$  に対して,  $w = f(z)$  とするとき,

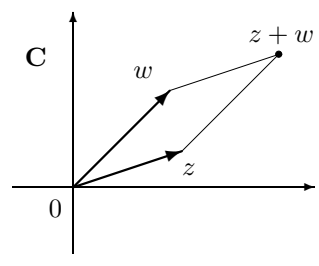
$$\begin{aligned}
z &= x + iy \\
w &= u + iv \\
f(z) &= z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \\
u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 \\
v(x, y) &= \operatorname{Im} f(z) = 2xy \\
f(z) &= u(x, y) + iv(x, y).
\end{aligned}$$

問題 1.2.2  $f(z) = z^3$  の実部  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  と虚部  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$  を計算しなさい.

問題 1.2.3 複素数  $z, w$  に対して, 複素数  $z\bar{w}$  の虚数部の絶対値

$$|\operatorname{Im}(z\bar{w})|$$

は複素数  $0, z, w, z + w$  を頂点とする平行四辺形の面積であることを示せ.



問題 1.2.4 コーシーの不等式 複素数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  に対して

$$|\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \dots + \alpha_n\bar{\beta}_n| \leq \sqrt{(\alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \dots + \alpha_n\bar{\alpha}_n)(\beta_1\bar{\beta}_1 + \beta_2\bar{\beta}_2 + \dots + \beta_n\bar{\beta}_n)}$$

が成り立つ. 等号が成り立つのは, ある  $\lambda \in \mathbf{R}$  に対して  $\alpha_i = \lambda\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が成り立つ場合にかぎる.

### 1.3 複素数と多項式

複素数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  を係数,  $X$  を不定元とする  $n$  次多項式 とは,

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

のことをいう, ここで  $a_n \neq 0$  である. この多項式の不定元  $X$  に複素数  $\alpha$  を代入することによって, 複素数  $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$  ( $p(\alpha)$  と表す) が得られる. 不定元への複素数の代入とその結果は, 複素数の変数  $z$  の多項式

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

の考えによって簡明に表示される.

二つの多項式  $p(z)$  と  $q(z)$  がすべての複素数  $z$  に対して同一の複素数値  $p(z) = q(z)$  を与えるとき, 多項式  $p(z)$  と  $q(z)$  は恒等的に等しいと言われる.

$n$  次多項式  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  を一次式  $z - \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ) でわると, 次数  $n - 1$  以下の商多項式  $q(z)$  と余り  $r$  が得られて恒等的に

$$p(z) = (z - \alpha)q(z) + r, \quad r = p(\alpha)$$

が成り立つことが知られている (剰余定理).

代数方程式の解 複素数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \neq 0$  を係数とする  $n$  次多項式

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

による  $n$  次方程式  $p(z) = 0$  の解である複素数  $\alpha$  を考えよう.

$n$  次多項式  $p(z)$  を一次式  $z - \alpha$  でわると, 次数  $n - 1$  以下の商多項式  $q(z)$  と余り  $r$  が得られて

$$p(z) = (z - \alpha)q(z) + r, \quad r = p(\alpha) \quad \text{剰余定理}$$

が成り立つ. 剰余  $r = p(\alpha) = 0$  であるから, つぎのことがわかる:

$$n \text{ 次方程式 } p(z) = 0 \text{ が複素数解 } \alpha \text{ を持てば, } p(z) = (z - \alpha)q(z). \quad \text{因数定理}$$

代数方程式の解の存在については, つぎの定理が重要である:

代数学の基本定理 複素数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \neq 0$  を係数とする  $n$  次方程式

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

は必ず複素数の解を持つ.

多項式  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  ( $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n (\neq 0) \in \mathbb{C}$ ) による

$n$  次方程式  $p(z) = 0$  は必ず複素数解  $\alpha_1$  を持つから、ある  $n-1$  次多項式  $a(z)$  によって

$$p(z) = (z - \alpha_1)a(z)$$

の形に表される。このとき、 $n-1$  次方程式  $a(z) = 0$  も必ずある複素数解  $\alpha_2$  を持つから、ある  $n-2$  次多項式  $b(z)$  によって

$$a(z) = (z - \alpha_2)b(z)$$

の形に表される。この場合

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)b(z)$$

が成り立つ。因数定理を使うこの論法を繰り返して、 $n$  次方程式  $p(z) = 0$  は重複をこめて  $n$  個の複素数解  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  を持ち、 $n$  次多項式  $p(z)$  は

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C})$$

と一次式の積の形に (因数分解して) 表される。このとき、 $p(z)$  の満たす関係式

$$\begin{aligned} & a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \\ &= a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n) \\ &= a_n \left\{ z^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) z^{n-1} + \right. \\ & \quad \left. (\alpha_1 \alpha_2 + \cdots + \alpha_i \alpha_j + \cdots + \alpha_{n-1} \alpha_n) z^{n-2} - \cdots + (-1)^n \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \right\} \end{aligned}$$

の係数を比較して、解と係数の関係

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \\ \vdots \\ \frac{a_1}{a_n} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n \\ \frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n \end{array} \right.$$

が成り立っていることがわかる。さらに、(0 でない)  $n$  次方程式  $p(z) = 0$  は  $n$  個の複素数解  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  と異なる複素数解を持ち得ないこともわかる。何故ならば、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  と異なる複素数  $\alpha$  に対しては

$$p(\alpha) = a_n(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \cdots (\alpha - \alpha_n) \neq 0$$

となるから。

多項式  $p(z)$  と  $q(z)$  が恒等的に等しいとき、多項式  $p(z)$  と  $q(z)$  は (形式的に) 次数が等しくまたその各項の係数も等しいことも容易に示されるだろう。

### 命題 1.3.1

実数係数の  $n$  次代数方程式  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n (\neq 0) \in \mathbf{R}$ ) が (実数でない) 複素数  $\alpha$  を解とするとき、その共役複素数  $\bar{\alpha}$  も解である。

証明 実数係数の  $n$  次多項式  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$  に対して,

$$p(\alpha) = 0 \quad \implies \quad p(\bar{\alpha}) = \overline{p(\alpha)} = 0$$

が成り立つからである. //

問題 1.3.2  $a, b, c \in \mathbf{C}$  とする.

(1)  $1 + \omega + \omega^2 = 0$  のとき,

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= (a+b+c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c). \end{aligned}$$

(2) 多項式  $z^3 + az^2 + bz + c = \left(z + \frac{a}{3}\right)^3 + p\left(z + \frac{a}{3}\right) + q$  が成り立つような複素数  $p, q$  を求めよ.

複素数の平方根

複素数  $\alpha + i\beta$  の平方根  $x + iy$  を考える. 複素数  $x + iy$  は

$$(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$$

が成り立つような複素数である. これは

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \alpha \\ 2xy &= \beta \end{aligned}$$

が成り立つということであるから,

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

故に

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

そして

$$x^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}), \quad y^2 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

従って

$$x = \pm \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.$$

$\beta \neq 0$  のとき

$\beta > 0$  ならば  $x$  と  $y$  の正負は同符号,  $\beta < 0$  ならば  $x$  と  $y$  は互いに異符号であるから,

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \begin{cases} \pm \left( \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right) & (\beta > 0) \\ \pm \left( \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right) & (\beta < 0). \end{cases}$$

$$\beta = 0 \text{ のとき } \sqrt{\alpha} = \begin{cases} \pm \sqrt{\alpha} & (\alpha > 0) \\ \pm i \sqrt{-\alpha} & (\alpha < 0). \end{cases}$$

問題 1.3.3 つぎの複素数を求めよ： $\sqrt{i}$ ,  $\sqrt{-i}$ ,  $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$ .

問題 1.3.4 複素数  $\alpha(\neq 0), \beta, \gamma$  を係数とする二次方程式

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

の解の公式を求めよ.

問題 1.3.5 実数を係数とする方程式を考える.

(1)  $z^2 + az + b = 0$  のすべての解の実部が負であるための必要十分条件は

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b > 0$$

である.

(2)  $z^3 + az^2 + bz + c = 0$  のすべての解の実部が負であるための必要十分条件は

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad ab > c > 0$$

である.

問題 1.3.6 つぎの関係式を示せ, ただし  $n = 1, 2, \dots$ .

$$(1) \quad 1 - z^n = (1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1})$$

$$(2) \quad 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1} = (1 - z)^2(1 + 2z + 3z^2 + \dots + kz^{k-1} + \dots + nz^{n-1})$$

問題 1.3.7 (Lagrange の補間公式)

相異なる複素数  $z_0, z_1, z_2$  に対して, 多項式  $f_0(z) = \frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \frac{z - z_2}{z_0 - z_2}$  は

$$f_0(z_0) = 1 \quad \text{かつ} \quad f_0(z_1) = f_0(z_2) = 0$$

を満たす. 相異なる複素数  $a, b, c$  に対して

$$f(z_0) = a, \quad f(z_1) = b, \quad f(z_2) = c$$

を満たす二次多項式  $f(z)$  を与えよ.

問題 1.3.8 (Eneström-Kakeya の定理)

$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0$  のとき, 多項式  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  の零点, すなわち, 方程式  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  の解の絶対値は 1 以上である.

Hint. 関係式  $(1 - z)p(z) = 0$  が成り立つとき,

$$a_0 = (a_0 - a_1)z + (a_1 - a_2)z^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)z^n + a_n z^{n+1}$$

が成り立つ.

問題 1.3.9 つぎの複素数を計算せよ： $1 + \frac{1}{1-i} + \frac{1}{(1-i)^2} + \dots + \frac{1}{(1-i)^{17}}$ .

## 1.4 複素数の指数関数

指数関数  $e^z$  の定義 複素数  $z = x + iy$  に対して,

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

と定義する, ここで  $e^x$  は実数  $x$  に対する指数関数の値  $e^x (= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!})$  である.

定理 指数関数  $e^z$  に対して, つぎのことが成り立つ:

複素数  $\alpha, \beta$  に対して,  $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta$ .

証明  $\alpha = a_1 + ia_2, \beta = b_1 + ib_2$  とすると,

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} &= e^{a_1+b_1+i(a_2+b_2)} = e^{a_1+b_1} \left\{ \cos(a_2 + b_2) + i \sin(a_2 + b_2) \right\} \\ &= e^{a_1+b_1} \left\{ \cos a_2 \cos b_2 - \sin a_2 \sin b_2 + i(\sin a_2 \cos b_2 + \cos a_2 \sin b_2) \right\} \\ &= e^{a_1} e^{b_1} (\cos a_2 + i \sin a_2) (\cos b_2 + i \sin b_2) = e^{a_1} (\cos a_2 + i \sin a_2) e^{b_1} (\cos b_2 + i \sin b_2) \\ &= e^\alpha e^\beta. \quad // \end{aligned}$$

系

(1) 複素数  $\alpha$  に対して,  $e^{\alpha+2\pi i} = e^\alpha$ .

指数関数  $e^z$  は周期  $2\pi i$  の周期関数

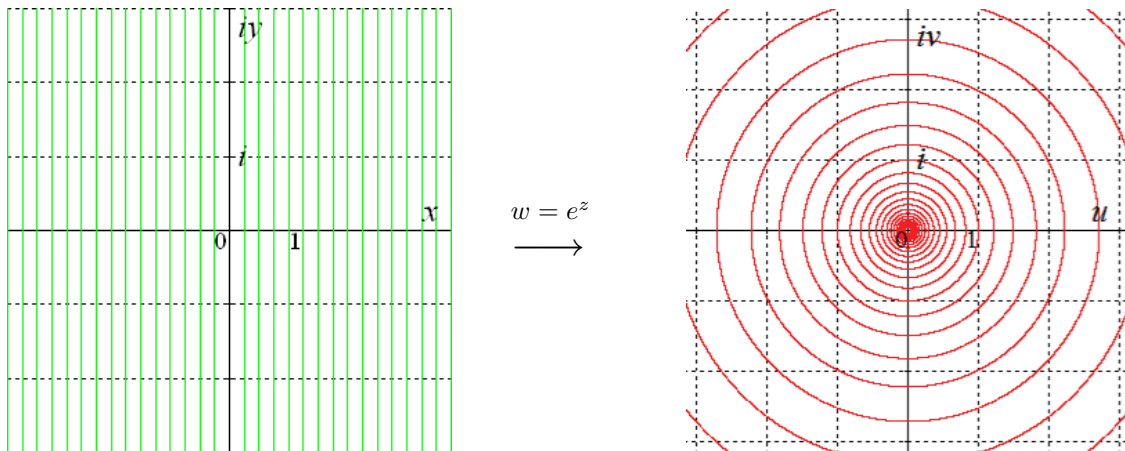
(2) 実数  $\theta$  に対して,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

オイラー (Euler) の公式

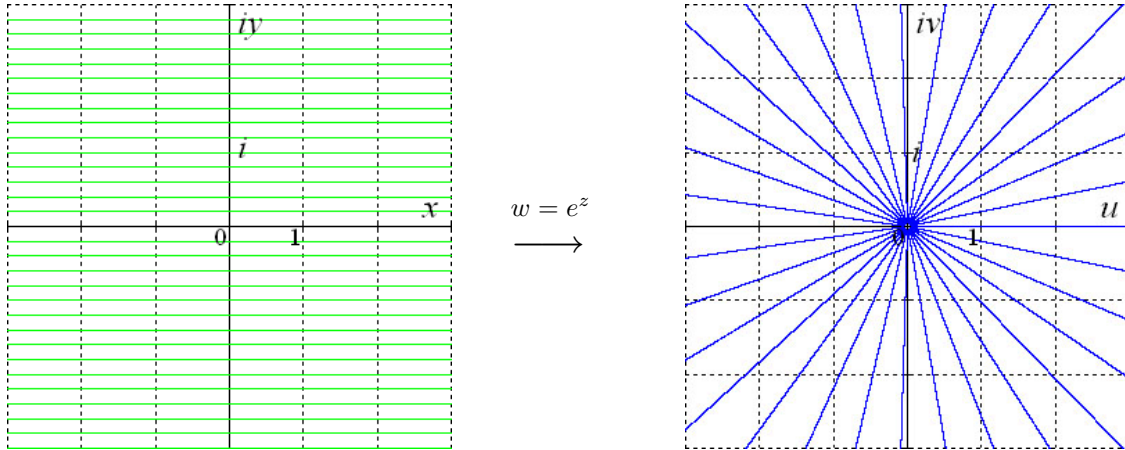
例  $e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ .

さて, 実軸に平行な直線  $y = y_0$  ( $y_0 \in \mathbf{R}$ ) の族と虚軸に平行な直線  $x = x_0$  ( $x_0 \in \mathbf{R}$ ) の族からなる格子は指数関数  $w = e^z$  でどのように写されるかを調べよう, ただし  $w = u + iv$  ( $u, v \in \mathbf{R}$ ).

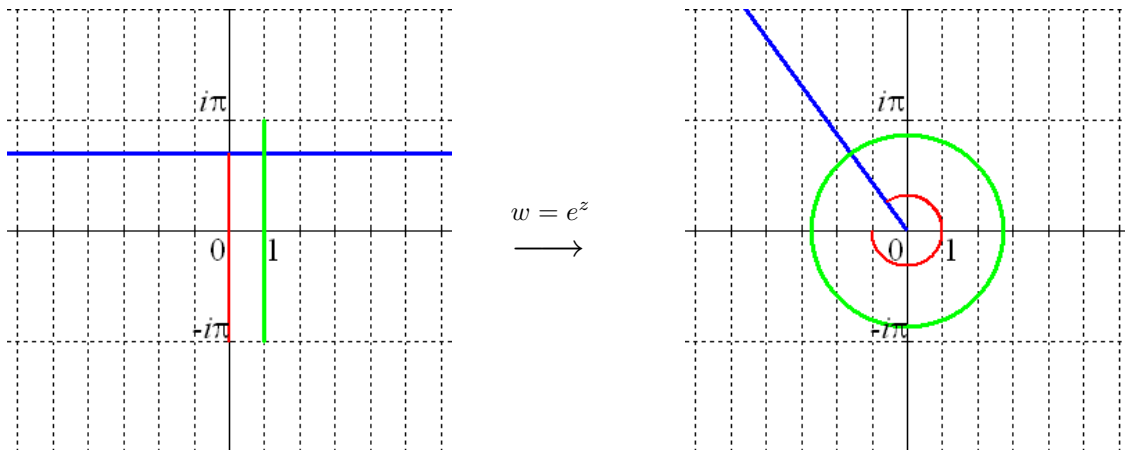
虚軸に平行な直線  $x = x_0$  を  $w = e^z$  で変換した像は, 下図のようになる.



実軸に平行な直線  $y = y_0$  を  $w = e^z$  で変換した像は，下図のようになる．



指数関数  $w = e^z$  は集合  $\{z \in \mathbf{C} \mid -\pi < \text{Im}z \leq \pi\}$  を 1 対 1 に集合  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$  へ写像している．



複素数のべき乗根 複素数  $z$  の  $n$  乗根とは  $w^n = z$  が成り立つ複素数  $w$  のことである ( $n \in \mathbf{N}$ ) .

複素数  $z = x + iy$  のすべての  $n$  乗根を求めよう．

$z = x + iy = Re^{i\theta} = R(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表される：

$$R = |z| > 0, \quad \theta = \arg z .$$

$n$  乗根を  $w = u + iv = Se^{i\varphi} = S(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  と表すと，

$$S^n = |w|^n = |w^n| = |z| = R$$

であるから

$$|w| = S = \sqrt[n]{R} = |z|^{\frac{1}{n}} .$$

また

$$w^n = \{S(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}^n = S^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$



であるから

$$\cos n\varphi = \cos \theta, \quad \sin n\varphi = \sin \theta$$

が成り立たねばならない．三角関数の周期性を考えて

$$n\varphi = \theta, \theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \dots, \theta + 2(n-1)\pi.$$

こうして 複素数  $z$  の  $n$  乗根が得られた：

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left\{ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

1 の  $n$  乗根 1 の  $n$  乗根 ( $n = 2, 3, \dots$ ) は

$$e^{\frac{2k\pi}{n}i} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である． $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  とすると，1 の  $n$  乗根 ( $n = 2, 3, \dots$ ) は  $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$  と表され， $\omega^n = 1$  である．

円周等分方程式 1 の  $n$  乗根 ( $n = 2, 3, \dots$ ) と因数定理から，つぎのことがわかる：

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2k\pi}{n}i}) = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\dots(z-\omega^{n-1}).$$

因数分解  $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$  から，

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{\frac{2k\pi}{n}i}) = (z-\omega)(z-\omega^2)\dots(z-\omega^{n-1})$$

がわかる．方程式  $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$  の解が半径 1 の円に内接する正  $n$  角形の頂点となっているので，この方程式は円周等分方程式とよばれている．

$$\omega^k = \frac{1}{\omega^{n-k}} \quad (\because \omega^n = 1)$$

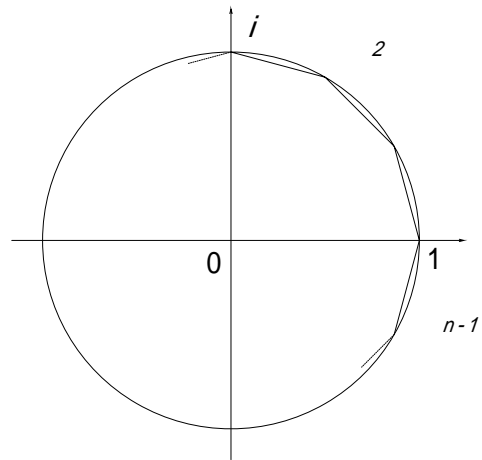
または

$$e^{\frac{2k\pi}{n}i} = e^{-\frac{2(n-k)\pi}{n}i} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

に注意して

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \left( z - \frac{1}{\omega^k} \right).$$

と表されることもわかる．



問題 1.4.1 つぎの方程式のすべての解を求めよ．

$$(1) \quad z^3 - i = 0 \quad (2) \quad z^3 + 1 - i = 0 \quad (3) \quad z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$$

## 1.5 複素数と曲線

複素数と直線 複素数  $z$  に対応する平面上の点を  $P(z)$  と表すことにする .

相異なる複素数  $\alpha, \beta$  に対応する平面の 2 点  $A(\alpha), B(\beta)$  に対して ,  $AP = BP$  を満たす点  $P(z)$  の軌跡は線分  $AB$  の垂直二等分線である . このことから , 垂直二等分線の方程式は

$$\begin{aligned} |z - \alpha| = |z - \beta| &\iff (z - \alpha)(\overline{z - \alpha}) = (z - \beta)(\overline{z - \beta}) \\ &\iff z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + \alpha\bar{\alpha} = z\bar{z} - \beta\bar{z} - \bar{\beta}z + \beta\bar{\beta} \\ &\iff (\alpha - \beta)\bar{z} + (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z - \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 0. \end{aligned}$$

$$X = \alpha - \beta, \quad D = |\beta|^2 - |\alpha|^2 \quad (\in \mathbf{R}) \quad \text{とおくと}$$

$$X\bar{z} + \bar{X}z + D = 0 \tag{\# 1}$$

逆に , 関係式 (\# 1) は直線を与えていることを示そう .

複素数  $X \neq 0$  と実数  $D$  に対して関係式 (\# 1) を満たす複素数  $z$  は ,

$$w = \frac{X}{|X|} = \cos \theta + i \sin \theta$$

とするとき

$$w\bar{z} + \bar{w}z + \frac{D}{|X|} = 0$$

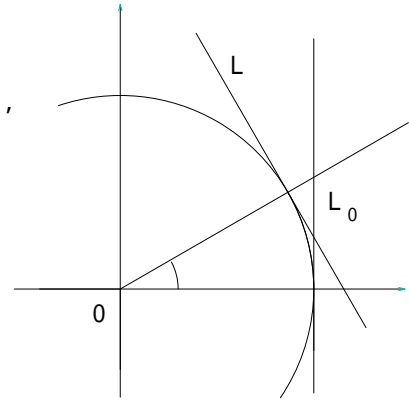
を満たす . 従って

$$2 \operatorname{Re} \left[ \bar{w}z \right] + \frac{D}{|X|} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \operatorname{Re} \left[ (\cos \theta - i \sin \theta)z \right] = -\frac{D}{2|X|}$$

が成り立つので , 複素数  $z$  を原点の周りに角  $-\theta$  だけ回転した複素数は

$$\text{直線 } L_0 : \operatorname{Re} z = -\frac{D}{2|X|}$$

の上にあることがわかる . このことから , 直線  $L = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid X\bar{z} + \bar{X}z + D = 0 \right\}$  は直線  $L_0$  を原点の周りに角  $\theta$  だけ回転した直線であることがわかる .



複素数と円 複素数  $\alpha$  に対応する平面の点  $A(\alpha)$  を中心とする半径  $r$  の円周上の点  $P(z)$  は ,

$$\begin{aligned} |z - \alpha| = r &\iff (z - \alpha)(\overline{z - \alpha}) = r^2 \\ &\iff z\bar{z} - \alpha\bar{z} - \bar{\alpha}z + \alpha\bar{\alpha} = r^2. \end{aligned}$$

$$Y = \alpha, \quad D' = |\alpha|^2 - r^2 \quad (\in \mathbf{R}) \quad \text{とおくと}$$

$$z\bar{z} - Y\bar{z} - \bar{Y}z + D' = 0. \tag{\# 2}$$

(# 1) と (# 2) より, 直線または円の方程式は

$$Ez\bar{z} + F\bar{z} + \bar{F}z + G = 0 \quad (E, G \in \mathbf{R}) \quad (\#)$$

で与えられる. この方程式は

$E = 0$  のとき 直線を表す. また

$E \neq 0$  のとき, この方程式は  $\left(z + \frac{F}{E}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{F}}{E}\right) = \frac{F\bar{F} - EG}{E^2}$  に同値であるから,

中心  $z_0 = -\frac{F}{E}$ , 半径  $R = \frac{\sqrt{|F|^2 - EG}}{|E|}$  の円<sup>1</sup>を表す.

直線または円を表す上の方程式は, 直線を半径無限大の円と見なせるという考えに導く.

### 二次関数とカーディオイド (心臓形 Cardioid)

関数  $w = z^2$  による, 中心 1 半径 1 の円  $\Gamma = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - 1| = 1\}$  の像を考える.

$z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta \in \Gamma$  のとき,

$$\begin{aligned} z^2 &= 1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2 \cos \theta + 2i \sin \theta + 2i \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + \cos 2\theta + 2 \cos \theta + 2i \sin \theta + i \sin 2\theta \\ &= (1 + \cos 2\theta + 2 \cos \theta) + i(2 \sin \theta + \sin 2\theta) \quad (-\pi < \theta \leq \pi) \end{aligned}$$

であるから, 曲線は

$$\begin{cases} x = 1 + \cos 2\theta + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta + \sin 2\theta \end{cases} \quad (-\pi < \theta \leq \pi).$$

とパラメーター表示される. この曲線は

$$\begin{cases} x = 2(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = 2(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases} \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

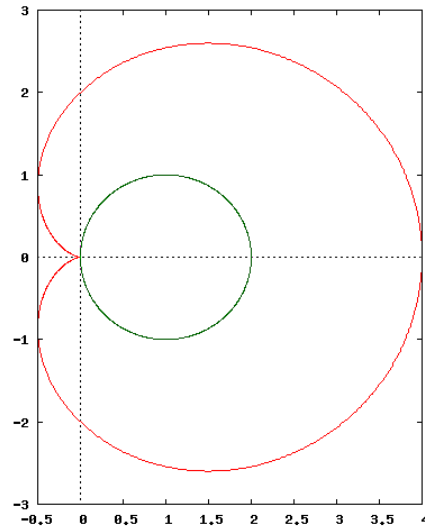
とパラメーター表示できるから, 極方程式

$$r = 2(1 + \cos \theta)$$

で与えられる曲線 カーディオイド (心臓形

Cardioid) である.

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$z$	2				$1 + i$		0
$z^2$	4				$2i$		0



<sup>1</sup>  $|F|^2 - EG < 0$  のとき, この円は空集合である.

問題 1.5.1 つぎのことを示せ .

(1) 複素数  $\alpha, \beta$  を頂点  $A(\alpha), B(\beta)$  とする線分  $AB$  を  $t:1-t$  ( $0 < t < 1$ ) に内分する点は  $P((1-t)\alpha + t\beta)$  である .

(2) 複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  を頂点  $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$  とする三角形の重心は  $P\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$  である .

問題 1.5.2 複素数平面上の点  $A(-1), B(2)$  からの距離の比が  $2:1$  である点  $P(z)$  の集合

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z + 1| : |z - 2| = 2 : 1 \right\}$$

を求めよ .

問題 1.5.3 (楕円) つぎのことを示せ .

(1) 実数  $c \neq \pm 1$  と  $f(z) = z + c\bar{z}$  ( $z \in \mathbf{C}$ ) に対して , 曲線  $\gamma = \{f(z) \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$  は楕円である .

(2) 0 でない複素数  $\alpha, \beta$  を係数とする  $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$  ( $z \in \mathbf{C}$ ) に対して ,  $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \neq \pm 1$  のとき  
 曲線  $\gamma = \{f(z) \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$  は楕円である .

問題 1.5.4 (2 次曲線の極表示)

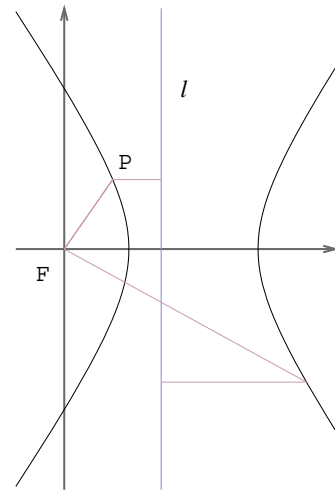
平面上の定点  $F$  と点  $F$  を通らない定直線  $l$  が与えられたとき , 点  $P$  から点  $F$  までの距離と点  $P$  から直線  $l$  までの距離の比 (離心率) が一定  $e (> 0)$  である点  $P$  の軌跡を考える .

今 , 複素数の平面で 定点  $F = 0$  , 定直線  $l : \operatorname{Re} z = a$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) とし , 軌跡上の点を  $P : z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とする . つぎのことを示せ .

(1) 軌跡上の点  $P$  の極表示は  $r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$  .

(2) 軌跡上の点  $P : z = x + iy$  に対して  $e = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a - x}$

が成り立つことから , 曲線は  $\begin{cases} 0 < e < 1 \text{ のとき , 楕円} \\ e = 1 \text{ のとき , 放物線} \\ e > 1 \text{ のとき , 双曲線.} \end{cases}$



## 1.6 一次分数関数

有理式  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  で定義される対応  $f : z \rightarrow w$  を考えよう ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ ). この有理式は

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\frac{-\alpha\delta}{\gamma} + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 z + \gamma\delta} & (\gamma \neq 0 \text{ のとき}) \\ \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta} & (\gamma = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と表わされる. このことから  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$  ( $\gamma \neq 0$ ) ならば, この対応  $f$  は定数写像であることがわかる. 複素数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  を  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  が成り立つとき, 写像

$$f : z \rightarrow w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

を  $\mathbb{C}$  の一次分数関数あるいは一次変換という. (一次変換は, 係数行列  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  が正則,

すなわち,  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  であるときに定義される.)

今,  $\gamma \neq 0$  の場合に, 一次変換  $f : z \rightarrow w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  を考える.

複素数  $w$  をに対して  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  が成り立つような複素数  $z$  は, この関係式から  $z$  を解いて

$$z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha} = -\frac{\delta}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 w - \gamma\alpha} \quad (\gamma \neq 0 \text{ のとき})$$

が得られる. これから, 一次変換  $f : z \rightarrow w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  が次の性質を持つことがわかる:

- 対応  $f$  は,  $-\frac{\delta}{\gamma}$  以外の複素数  $z$  で定義された 1:1 写像 である.
- 対応  $f$  は,  $\frac{\alpha}{\gamma}$  以外の複素数  $w$  を値に取る.

すなわち,

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$$

は  $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$  から  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\alpha}{\gamma} \right\}$  の上への 1 対 1 写像 (全単射) である.

有理式  $z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$  で定義される一次変換が  $f$  の逆写像 (関数) であるから,  $f^{-1}$  と表される:

$$f^{-1} : w \rightarrow z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}.$$

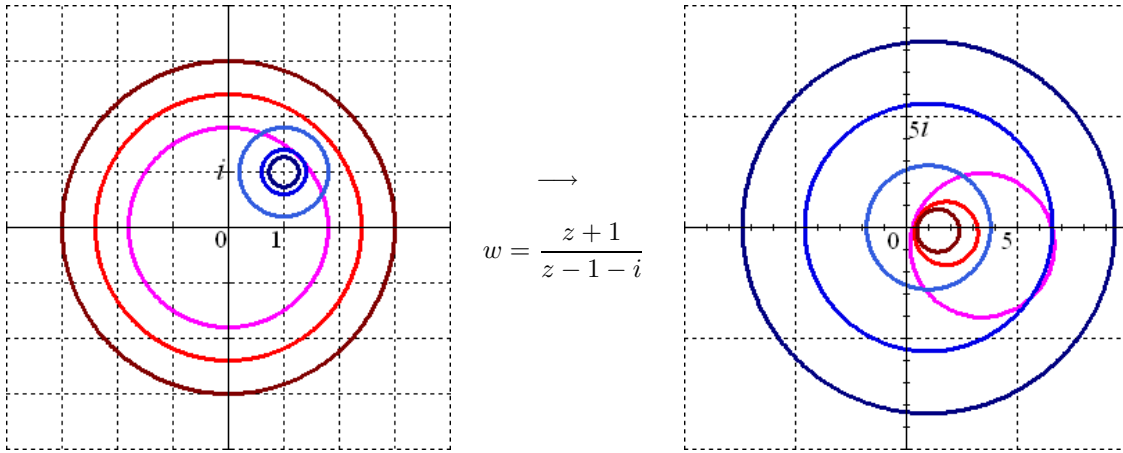
$\gamma \neq 0$  の時, 一次変換  $f : z \rightarrow w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 z + \gamma\delta}$  が成り立っているから,

複素数平面  $\mathbb{C}$  の無限遠に点  $\infty$  を置いて

$$f(\infty) = \frac{\alpha}{\gamma} \quad \left( \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 \cdot \infty + \gamma\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ と置いた.} \right)$$

$$f\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) = \infty \quad \left( \frac{\alpha \cdot \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + \beta}{\gamma \cdot \left(-\frac{\delta}{\gamma}\right) + \delta} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{0} = \infty \text{ と置いた.} \right)$$

と考えると,  $f^{-1}(\infty) = -\frac{\delta}{\gamma}$ ,  $f^{-1}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = \infty$  と見なすことができる.



例えば, 上図の一次変換  $f : z \rightarrow w = \frac{z+1}{z-1-i}$  の場合には,  $z = 1+i$  を中心とする円  $\Gamma$  の像は  $\Gamma$  の半径が大きくなるにつれて無限遠に拡大していく. また,  $z = 0$  を中心とする円  $\gamma$  の像は  $\gamma$  の半径が大きくなるにつれて  $w = 1$  の周りに収縮していく.

リーマン球 複素数平面  $\mathbb{C}$  に無限遠点  $\infty$  をつけ加えて  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  と定義すると, 一次変換

$f : z \rightarrow w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  ( $\gamma \neq 0$ ) は  $\bar{\mathbb{C}}$  から  $\bar{\mathbb{C}}$  の上への 1 対 1 写像 (全単射) であることになり,

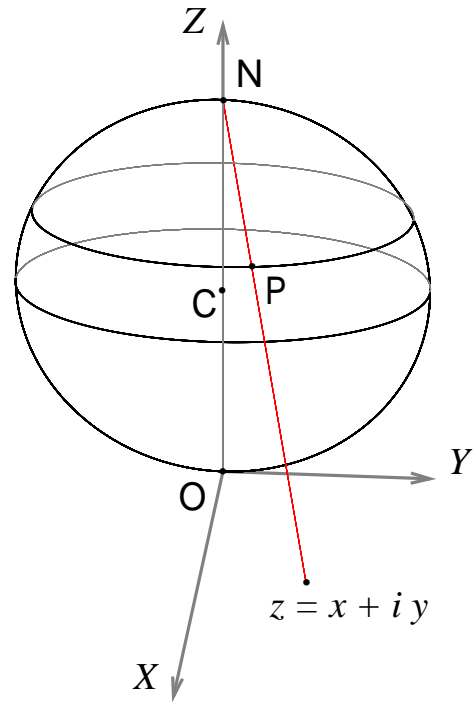
その  $\bar{\mathbb{C}}$  から  $\bar{\mathbb{C}}$  への逆写像が一次変換  $f^{-1} : w \rightarrow z = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$  である.

無限遠点  $\infty$  をつけ加えて拡張された複素数平面  $\bar{\mathbb{C}}$  はつぎのようにして球面と見なされる:

空間  $\mathbb{R}^3$  の直交座標系  $X, Y, Z$  に関して, 原点  $O = (0, 0, 0)$  で平面  $\pi : Z = 0$  に接する中心

$C = (0, 0, \frac{1}{2})$  の球  $S$  (半径  $\frac{1}{2}$ ) を考える (リーマン球と呼ぶ).

今、空間  $\mathbf{R}^3$  の点  $(x, y, 0)$  を複素数  $z = x + iy$  に対応させて、平面  $\pi : Z = 0$  を複素数平面とみなす。リーマン球  $S$  上の北極点  $N = (0, 0, 1)$  と複素数  $z = x + iy$  に対応している点  $(x, y, 0)$  を結ぶ直線は、唯一点  $P$  でリーマン球  $S$  と交わることは明らかである。



この対応  $z \rightarrow P$  を通して、複素数平面  $C$  をリーマン球面から北極点  $N$  を除いた部分  $S \setminus \{N\}$  と同一視するとき、北極点  $N$  は複素数平面の無限遠点  $\infty$  と見なすことができる。こうして、拡張された複素数平面  $\bar{C}$  はリーマン球  $S$  として視覚化される。

さて、一次変換  $f : z \rightarrow w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  は

$$f(z) = w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 z + \gamma\delta}$$

なる分解が可能であることから、一次変換  $f$  は次の三つの変換の合成とみることができる:

1. ある複素数  $\alpha$  による一次変換  $f_1 : z \rightarrow \alpha z$ .

$$\alpha = r_1 e^{i\theta_1}, z = r e^{i\theta} \text{ とすると, } f_1(z) = \alpha z = r r_1 e^{i(\theta+\theta_1)}.$$

この一次変換は、複素数  $z$  を原点の回りに  $\theta_1$  回転させ、さらに原点からの距離を  $r_1$  倍する変換である。一次変換  $f_1$  は  $|r_1| > 1$  のとき 相似拡大、 $|r_1| < 1$  のとき 相似縮小を表す。

2. ある複素数  $\beta$  による一次変換  $f_2 : z \rightarrow z + \beta$ .

$$\beta = u + iv \ (x, y, u, v \in \mathbf{R}), z = x + iy \text{ とすると, } f_2 = z + \beta = (x + u) + i(y + v).$$

この一次変換は、複素数  $z$  を実軸方向に  $u$ 、虚軸方向に  $v$  だけ値を増減させた変換である。

一次変換  $f_2$  は、平行移動を表す。

3.  $f_3 : z \rightarrow \frac{1}{z}$ .

$$f_3(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

であるから、この一次変換は、複素数  $z$  を  $\frac{1}{|z|^2}$  倍して、さらに

実軸に関して対称移動する反転(変換)である。

一次分数関数は円を円に写すこと

1.5 複素数と曲線 で調べたように、直線または円の方程式は

$$Ez\bar{z} + F\bar{z} + \bar{F}z + G = 0 \quad (E, G \in \mathbf{R}) \quad (\#)$$

で与えられる。この方程式は

$E = 0$  のとき 直線を表し、 $E \neq 0$  のとき 円を表す。

$E \neq 0$  のとき 円の中心  $z_0$  , 半径  $R$  は次のようになる：

$$z_0 = -\frac{F}{E}, \quad R = \frac{\sqrt{|F|^2 - EG}}{|E|}.$$

このとき、一次変換  $f_1, f_2$  が円を円に写すのは、明らかである。一次変換  $f_3$  において、

$$w = \frac{1}{z} \text{ すなわち } \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}} \text{ の場合の関係式 } \begin{cases} E\left(\frac{1}{w}\right)\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) + F\frac{1}{w} + \bar{F}\frac{1}{\bar{w}} + G = 0 \\ Gw\bar{w} + \bar{F}\bar{w} + Fw + E = 0 \end{cases}$$

は  $G = 0$  のとき 直線を表し、 $G \neq 0$  のとき 円を表すので、 $f_3$  は円を円または直線に写す。

一次変換は  $f_1, f_2, f_3$  の合成であるから、複素数平面上の円または直線は、(一次変換によって)

円または直線に写されることがわかる。

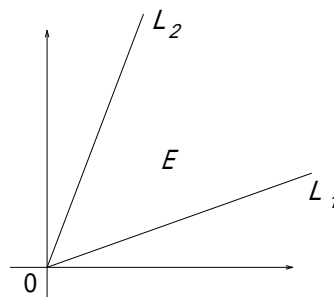
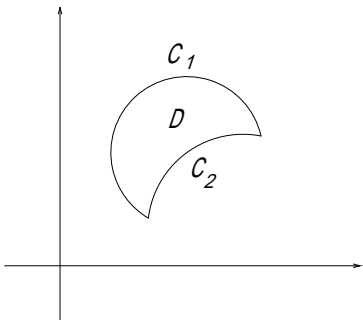
直線を半径 無限大の円と見なせば、円は円に写されるということができる。

問題 1.6.1 複素数  $\alpha$  が  $|\alpha| < 1$  を満たすとき、

$$\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} = 1 \iff |z| = 1$$

を示せ。

問題 1.6.2 一次変換  $\frac{z - \alpha}{z - \beta}$  ( $\alpha \neq \beta$ ) は  $\alpha, \beta$  を通る円弧  $C_1, C_2$  で囲まれた三日月型の領域  $D$  を  $0$  を頂点とする半直線  $L_1, L_2$  で囲まれた角領域  $E$  へ写すことを示せ。





## 1.7 複素対数

複素数  $z \neq 0$  に対して  $e^w = z$  が成り立つような複素数  $w$  をすべて求めよう．そのため，複素数を実部と虚部を使って  $z = x + iy$  と  $w = u + iv$  と表すと，方程式  $e^w = z$  は連立方程式

$$\begin{cases} x = e^u \cos v \\ y = e^u \sin v \end{cases}$$

の形に表される．このとき

$$x^2 + y^2 = e^{2u}$$

が成り立つから，

$$u = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \log |z|$$

を満たさなければならない．そのとき連立方程式は

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos v \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin v \end{cases}$$

の形に表されるから

$$\begin{cases} \cos(\arg z) = \cos v \\ \sin(\arg z) = \sin v \end{cases}$$

を満たさなければならない．三角関数の周期性を考慮して，

$$v = \arg z$$

でなければならない．こうして， $e^w = z \neq 0$  が成り立つような複素数  $w$  は

$$w = \log |z| + i \arg z$$

である．この複素数の集合を  $\log z$  と表し複素数  $z \neq 0$  の複素対数とよぶ：

$$\log z = \log |z| + i \arg z.$$

例  $\log 2i = \log |2i| + \arg 2i = \log 2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i \quad (n \in \mathbf{Z}).$

問題 1.7.1 つぎの複素対数を求めよ．

$$(1) \quad \log(-i) \qquad (2) \quad \log(1+i) \qquad (3) \quad \log(\sqrt{3}-i)$$

問題 1.7.2  $\log e^z = z + 2n\pi i \quad (n \in \mathbf{Z})$  を示せ．

さて, 0 でない複素数  $z$  の  $n (n \in \mathbf{N})$  乗根  $\sqrt[n]{z}$  とは  $w^n = z$  が成り立つ複素数  $w$  のことであるが,  $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  であるとき複素数  $z$  の  $n$  乗根は

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left\{ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \log \sqrt[n]{z} &= \log \sqrt[n]{|z|} + i \left\{ \frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2l\pi \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1, l \in \mathbf{Z}) \\ &= \frac{1}{n} \log |z| + i \left\{ \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right\} \quad (k \in \mathbf{Z}) \\ &= \frac{1}{n} \log z \quad (\because \log z = \{ \log |z| + i(\theta + 2k\pi) \mid k \in \mathbf{Z} \}) \end{aligned}$$

が成り立っている. このことから 複素数  $z \neq 0$  に対して

$$e^{\frac{1}{n} \log z} = \sqrt[n]{z}$$

が成り立つことがわかる. もちろん, 整数  $n$  に対して

$$e^{n \log z} = \left\{ e^{n(\log |z| + i(\theta + 2k\pi))} \mid k \in \mathbf{Z} \right\} = z^n$$

が成り立つことは明らかである.

**定義 1.7.3** 複素数  $\alpha$  と 0 でない複素数  $z$  に対して

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

と定義する.

例  $\log i = \log 1 + \arg i = \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) i$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) であるから,  $i^i = e^{i \log i} = \left\{ e^{-(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)} \mid n \in \mathbf{Z} \right\}$ .

一般に複素数  $z \neq 0$  の偏角  $\arg z$  は  $2\pi$  の整数倍のあいまいさがあるので, 偏角  $\arg z$  を区間  $(-\pi, \pi]$  に採った値  $\theta$  を偏角の主値という: すなわち

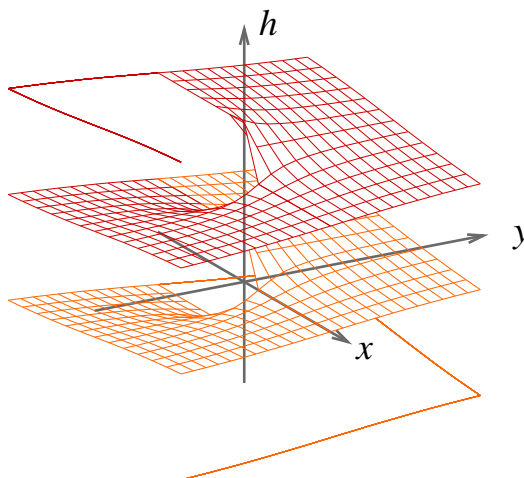
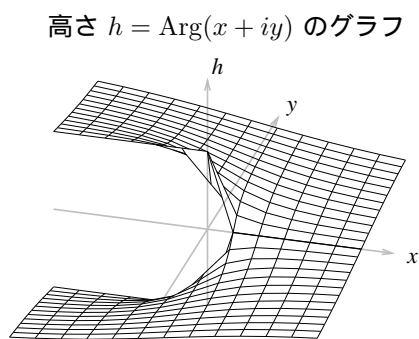
$$\begin{cases} z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) & (-\pi < \theta \leq \pi) \\ \arg z = \theta + 2n\pi & (n \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

偏角の主値を  $\text{Arg } z$  と表すと,

$$\begin{cases} z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z) & (-\pi < \text{Arg } z \leq \pi) \\ \arg z = \text{Arg } z + 2n\pi & (n \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$

が成り立つ.

高さ  $h = \arg(x + iy)$  のグラフ (部分)



このとき

$$\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$$

は  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  で定義された関数となり，複素対数の主値とよばれる．明らかに  $z \neq 0$  に対して

$$\log z = \log |z| + i \arg z = \{\text{Log } z + 2n\pi i \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

一般に，複素数の平面  $\mathbb{C}$  の領域  $D$  で定義された連続関数  $f(z)$  で  $e^{f(z)} = z$  を満たす，すなわち  $f(z) \in \log z$  を満たす，連続関数を  $\log z$  の分枝という．この意味で複素対数の主値  $\text{Log } z$  は  $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$  上の1つの分枝であり， $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$  上の  $\log z$  の他の分枝は  $\text{Log } z + 2n\pi i$  で与えられる，ここで  $n \in \mathbb{Z}$  である．

例 任意の実数  $\alpha$  に対して，複素数の平面  $\mathbb{C}$  の半直線  $L_\alpha : z = re^{i\alpha}$  ( $r \geq 0$ ) を考える．領域  $D = \mathbb{C} \setminus L_\alpha$  に含まれる複素数  $z$  の偏角  $a_\alpha(z)$  を  $\alpha < a_\alpha < \alpha + 2\pi$  を満たすようにとるとき，

$$F_\alpha(z) = \log |z| + i a_\alpha(z)$$

は  $D$  上の連続関数で  $e^{F_\alpha(z)} = z$  を満たす，すなわち  $F_\alpha(z)$  は  $D$  上の  $\log z$  の分枝である．

同様な意味で，複素数の平面  $\mathbb{C}$  の領域  $D$  で定義された連続関数  $f(z)$  で  $f(z)^n = z$  を満たす，すなわち  $f(z) \in \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \log z$  を満たす，連続関数を  $\sqrt[n]{z}$  の分枝という ( $n \in \mathbb{N}$ )．この意味で偏角の主値  $\text{Arg } z$  から定義される連続関数

$$\sqrt[n]{|z|} \left\{ \cos\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) \right\} = e^{\frac{1}{n} \text{Log } z}$$

は  $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$  上の  $\sqrt[n]{z}$  の1つの分枝であり， $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$  上の  $\sqrt[n]{z}$  の他の分枝は

$$\sqrt[n]{|z|} \left\{ \cos\left(\frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg } z + 2k\pi}{n}\right) \right\} = e^{\frac{1}{n} (\text{Log } z + 2k\pi i)}$$

で与えられる，ここで  $k = 1, 2, \dots, n-1$  である．

## 1.8 応用 オイラーの公式と微分方程式

実数  $t$  を変数とし複素数を値にとる関数  $z(t) = \alpha e^{\omega t}$  を考えてみよう, ただし  $\alpha, \omega \in \mathbf{C}$  とする. 関数  $z(t)$  の微分係数がつぎのように計算される:

$\omega = p + iq$  ( $p, q \in \mathbf{R}$ ) のとき,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha e^{\omega(t+h)} - \alpha e^{\omega t}}{h} = \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\omega t + \omega h} - e^{\omega t}}{h} \\ &= \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\omega t} e^{\omega h} - e^{\omega t}}{h} = \alpha e^{\omega t} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\omega h} - 1}{h} = z(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(p+iq)h} - 1}{h} \\ &= z(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ph+iqh} - 1}{h} = z(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ e^{ph} \cdot \frac{\cos qh - e^{-ph} + i \sin qh}{h} \right\} \\ &= z(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cos qh - e^{-ph}}{h} + i \frac{\sin qh}{h} \right\} \quad (\because \lim_{h \rightarrow 0} e^{ph} = 1) \\ &= z(t) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\cos qh - 1}{h} + \frac{1 - e^{-ph}}{h} + i \frac{\sin qh}{h} \right\} = z(t) \cdot (p + iq) \\ & \quad (\because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos qh - 1}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{h} = p, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin qh}{h} = q \quad \text{微分積分学から}) \\ &= \omega z(t) \quad (= \omega \alpha e^{\omega t}) \end{aligned}$$

が成り立つ ( $-\infty < t < \infty$ ). また, 複素数値関数  $z(t) = \alpha e^{\omega t}$  の実部, 虚部をそれぞれ

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t), \quad y(t) = \operatorname{Im} z(t)$$

と表すとき,  $z(t) = x(t) + i(y(t))$  であるから

$$\begin{aligned} z'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) + iy(t+h) - (x(t) + iy(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = x'(t) + iy'(t) \end{aligned}$$

が成り立つ ( $-\infty < t < \infty$ ).

**問題 1.8.1**  $\alpha = a + ib, \omega = p + iq$  ( $a, b, p, q \in \mathbf{R}$ ) のとき,  $z(t) = \alpha e^{\omega t}$  の実部  $x(t)$  と虚部  $y(t)$  を計算して求めよ.

例えば, ある実数  $\lambda$  に対して  $z(t) = e^{i\lambda t} = \cos \lambda t + i \sin \lambda t$  を考えると, ( $z'(t) = i\lambda z(t)$  より)

$$z''(t) = -\lambda^2 z(t)$$

が成り立ち, この関係式は

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \lambda t = -\lambda^2 \cos \lambda t, \quad \frac{d^2}{dt^2} \sin \lambda t = -\lambda^2 \sin \lambda t$$

を表している.

複素数  $\beta$  が二次方程式  $x^2 + \mu x + \nu = 0$  ( $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ ) の解である場合, 関数  $z(t) = \alpha e^{\beta t}$  は微分方程式

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \mu \frac{d}{dt} z(t) + \nu z(t) = 0$$

を満たすことがわかる; さらに,  $z(t)$  の実部  $x(t)$  と虚部  $y(t)$  も同じ微分方程式を満たす.

例. 正弦波交流の複素数表示

抵抗  $R$  , 電気容量  $C$  のコンデンサーと自己インダクタンス  $L$  のコイルが直列に接続された交流回路に電源から電流が時刻  $t$  に電圧  $V = V_0 \sin \omega t$  (周波数  $f = \frac{2\pi}{\omega}$ ) で流れているとする .

この回路に流れる電流は  $I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$  と表されることがわかっているのであるが , このような交流回路 (RLC) での電圧  $V$  や電流  $I$  を実変数  $t$  に対して複素数値をとる関数

$$\begin{cases} V(t) = V_0 e^{i\omega t} = V_0(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ I(t) = I_0 e^{i(\omega t + \phi)} = I_0(\cos(\omega t + \phi) + i \sin(\omega t + \phi)) \end{cases} \quad (V_0, I_0, \omega, \phi \in \mathbf{R})$$

の虚数部として考えることが有効であることが知られている .

この複素数表示のもとでは , オームの法則により交流回路における抵抗器で (両端での) 電圧は

$$V_R = RI$$

となる .

コイルに流れる電流は位相の遅れ  $\frac{\pi}{2}$  が生じ (コイルの両端での) 電流と電圧は

$$V_L = i\omega LI \quad (= L \frac{dI}{dt}) ,$$

コンデンサーに流れる電圧は位相の進み  $\frac{\pi}{2}$  が生じ (コンデンサー両端での) 電圧と電流は

$$V_C = -i \frac{I}{\omega C} = \frac{I}{i\omega C}, \quad (I = C \frac{dV_C}{dt})$$

となることが知られている . この回路での抵抗を表すインピーダンス  $Z$  は複素数で

$$\begin{cases} Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| e^{i\phi} \\ \cos \phi = \frac{R}{|Z|}, \quad \tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \end{cases}$$

と表され ,  $V = IZ$  が成り立つ . 実際 , この交流回路に流れる電圧は

$$\begin{aligned} V &= V_R + V_L + V_C = RI + i\omega LI - i \frac{I}{\omega C} \\ &= I \left\{ R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right\} = IZ \end{aligned}$$

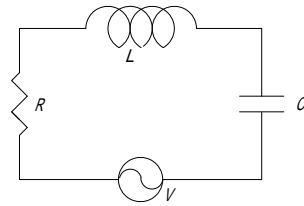
を満たしている . 電源の電圧は  $V = V_0 e^{i\omega t}$  であるから , この交流回路に流れる電流はインピーダンス  $Z \neq 0$  のとき位相の遅れ  $\phi$  によって

$$I(t) = \frac{V(t)}{Z} = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}, \quad I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

の虚数部によって

$$I = I_0 \sin(\omega t - \phi)$$

と表されている .



## 演習問題 1

1 複素数  $|z| = |\alpha| = 1$  ( $z \neq \alpha$ ) のとき,  $\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right| = 1$  が成り立つ.

2  $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}, \beta = e^{\frac{4\pi}{3}i}$  とし, 1 の 3 乗根  $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$  を考える. つぎの問に答えよ.

(1)  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  と  $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$  のすべての 3 乗根を  $\alpha, \beta, \omega$  を使って表せ.

(2)  $(\alpha + \beta\omega^2)(\alpha\omega + \beta\omega)(\alpha\omega^2 + \beta) = -1$  .

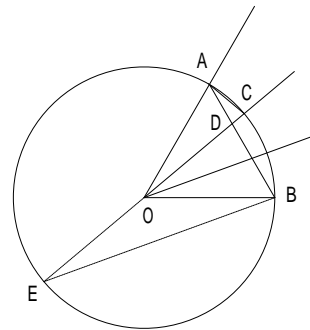
(3)  $(\alpha + \beta\omega^2)(\alpha\omega + \beta\omega) + (\alpha\omega + \beta\omega)(\alpha\omega^2 + \beta) + (\alpha\omega^2 + \beta)(\alpha + \beta\omega^2) = -3$  .

(4) 方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  は実数  $2 \cos \frac{4\pi}{9} = 2 \sin \frac{\pi}{18}, 2 \cos \frac{2\pi}{9}, 2 \cos \frac{8\pi}{9}$  を解とする.

注意. 方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  の解が  $\sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}}$  という形に表されることは三次方程式の解法と関連している.

(5) 方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  の解は無理数であることを示せ.

参考. 半径 1 の円周上の点 A, B と円の中心 O が正三角形 OAB を与えている.  $\angle AOB$  の 3 等分線と円の交点を C とする,  $\angle AOC = \frac{1}{3} \angle AOB$ . 線分 AC の長さを  $x$  とすると,  $x^3 - 3x + 1 = 0$  が成り立つことを示せ. 実は  $x = 2 \sin 10^\circ$  である. Hint. 三角形の相似関係を使い, 線分 CD の長さが  $x^2$  であることを示す.



3  $n \in \mathbf{N}$  に対して, つぎのことを示せ.

(1)  $\cos^n \theta = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cos(n - 2k)\theta$  .

(2)  $n = 2m$  のとき

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k {}_n C_{2k+1} \cos^{n-2k-1} \theta \sin^{2k+1} \theta \\ &= n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \cdots + (-1)^{m-1} n \cos \theta \sin^{n-1} \theta. \end{aligned}$$

(3)  $n = 2m + 1$  のとき

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= \sum_{k=0}^m (-1)^k {}_n C_{2k+1} \cos^{n-2k-1} \theta \sin^{2k+1} \theta \\ &= n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)(-2)}{3!} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \cdots + (-1)^m \sin^n \theta. \end{aligned}$$

(4)

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

4 (1) 複素数  $z$  が単位円周上を動くとき,  $w = \frac{1}{1-z}$  はどんな図形をえがくか.

(2) 複素数  $z$  が  $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$  の直線上を動くとき,  $w = \frac{1}{1-z}$  はどんな図形をえがくか.

(3) 複素数  $z$  が 0 を中心とする半径 2 の円周上を動くとき,  $w = \frac{1}{1-z}$  はどんな図形をえがくか.

5 つぎのことを示せ ( $n = 2, 3, \dots$ ):

$$(1) \quad \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k\pi}{n}i} = e^{\frac{\pi}{n}i} e^{\frac{2\pi}{n}i} \cdots e^{\frac{(n-1)\pi}{n}i} = i^{n-1}.$$

$$(2) \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

6 定理

実数係数の  $n$  次多項式  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$  ( $a_0, a_1, \dots, a_n (\neq 0) \in \mathbf{R}$ ) は実数係数の一次式と実数係数の二次式の積

$$a_n(z - b_1)^{m_1}(z - b_2)^{m_2} \cdots (z^2 + c_1 z + d_1)^{n_1}(z^2 + c_2 z + d_2)^{n_2} \cdots$$

に等しいことを示せ. 注. この定理は理論的事実を示しているのであって, 多くの場合に, 代数方程式  $p(z) = 0$  の複素数解を具体的には書き表せないように, 多項式  $p(z)$  を具体的に因数分解できるわけではない.

7 1.8 応用 を参照して, 実数係数の微分方程式  $y'' + \mu y' + \nu y = 0$  がつぎのような解  $y = y(x)$  を持つことを示せ:

$$(1) \quad y(x) = c e^{-\frac{\mu x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\nu - \mu^2}}{2}x + \phi\right) \quad (\mu^2 - 4\nu < 0)$$

$$(2) \quad y(x) = c_1 e^{-\frac{\mu x}{2}} + c_2 t e^{-\frac{\mu x}{2}} \quad (\mu^2 - 4\nu = 0)$$

$$(3) \quad y(x) = c_1 e^{-\frac{\mu + \sqrt{4\nu - \mu^2}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{\mu - \sqrt{4\nu - \mu^2}}{2}x} \quad (\mu^2 - 4\nu > 0)$$

$$(c, c_1, c_2, \phi \in \mathbf{R}).$$





## 第2章 複素関数

### 2.1 複素数列の収束と連続関数

複素数列の収束 複素数列  $z_n (n = 1, 2, \dots)$  がある複素数  $z_0$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0$$

を満たすとき、複素数列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  は極限值  $z_0$  に収束するといわれる。また  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$  と表す。

また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$$

を満たすとき、複素数列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  は無限遠  $\infty$  に発散するといわれる。

例. 複素数  $|z| < 1$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$  がわかる。このとき

$|z| = \frac{1}{1+h} < 1$  ( $\exists h > 0$ ) と表わされることから、

$$\begin{aligned} 0 \leq n|z|^n &= \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{n}{1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2} \\ &\leq \frac{1}{\frac{1}{n} + h + \frac{(n-1)}{2}h^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nz^n = 0$  となることがわかる。

また、複素数  $|z| > 1$  のときには、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = +\infty$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \infty$  となることがわかる。

(複素) 無限級数の和 複素数の無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  に対して、その部分和の数列が収束するとき、

すなわち、つぎの性質

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z_k = z_0$$

が成り立つとき 無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  は収束して和  $z_0$  を持つといわれる、また  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0$  と表す。

例. 複素数の等比級数 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  の部分 and  $S_n = \sum_{k=0}^n z^k$  に対して,

$$|z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad S_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{1 - z} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

となるから, つぎが成り立つ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad (|z| < 1).$$

問題 2.1.1 複素数  $z$  が  $|z| < 1$  を満たすとき, が成り立つことを示せ (Hint. 問題 1.3.6) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

問題 2.1.2 複素数  $z$  が  $|z| > 1$  を満たすとき, つぎのことを示せ:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z(z-1)}.$$

問題 2.1.3 無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{2n}}$  の和を求めよ.

定義 2.1.4 (極限值) 領域  $D$  で定義された複素数  $z$  を変数とする関数  $f(z)$  が  $z$  が  $z_0 (\in \mathbb{C})$  に

近づくととき極限值  $\gamma$  をとるとは

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \gamma$$

が成り立つこと, すなわち,

$$|z - z_0| \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(z) - \gamma| \longrightarrow 0$$

が成り立つことである.

また,  $z$  が  $z_0 (\in \mathbb{C})$  に近づくととき無限遠  $\infty$  に発散するとは

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

が成り立つこと, すなわち,

$$|z - z_0| \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \longrightarrow +\infty$$

が成り立つことである.

例. 複素数  $|z| < 1$  のときには,  $\lim_{z \rightarrow 0} |z|^n = 0$  より  $\lim_{z \rightarrow 0} z^n = 0$ , ただし  $n \in \mathbb{N}$  とする. また,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty .$$

関数の極限值については, つぎの定理が成り立つ.

定理 2.1.5 領域  $D$  で定義された複素数  $z$  を変数とする関数  $f(z), g(z)$  に対してつぎのことが

成り立つ:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \beta$  のとき

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) \pm g(z)\} = \alpha \pm \beta$$

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} cf(z) = c\alpha \quad (c \in \mathbb{C})$$

$$(3) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \alpha\beta$$

$$(4) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \beta \neq 0 \text{ のとき, } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

(5) 複素数  $\alpha$  を含む領域で定義された関数  $h(w)$  によって合成関数  $h(f(z))$  が定義されるとき,

$$\lim_{w \rightarrow \alpha} h(w) = \gamma \quad \text{ならば} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} h(f(z)) = \gamma .$$

平面の領域で定義された複素数を変数とする関数の連続性について考えてみましょう.

定義 2.1.6 (連続性) 領域  $D$  で定義された複素数  $z$  を変数とする関数  $f(z)$  に対して,  $z_0 \in D$

で極限值

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

が成り立つとき, 関数  $f(z)$  は  $z = z_0$  で連続であるといわれる, すなわち,

$$f(z) \text{ は } z = z_0 \text{ で連続である} \quad \iff \quad \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0 .$$

関数の連続性については, つぎの定理が成り立つ.

定理 2.1.7 領域  $D$  で定義された複素数  $z$  を変数とする関数  $f(z), g(z)$  が  $D$  で連続

のときつぎのことが成り立つ:

- (1)  $f(z) + g(z)$  ,  $\alpha f(z)$  ( $\alpha \in \mathbf{C}$ ) ,  $f(z)g(z)$  は  $D$  で連続である .
- (2)  $D$  で  $g(z) \neq 0$  のとき ,  $\frac{f(z)}{g(z)}$  は  $D$  で連続である .
- (3) 領域  $E$  で定義された複素数  $w$  の関数  $h(w)$  によって 合成関数  $h(f(z))$  が定義される場合 , 関数  $h(w)$  が  $E$  で連続ならば 合成関数  $h(f(z))$  は  $D$  連続である .

例. 関数  $f(z) = z$  は  $\mathbf{C}$  で連続である . 明らかに , どの  $z_0 \in \mathbf{C}$  でも

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0| = 0$$

であるから , 上の定理 によってすべての有理関数

$$R(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0} \text{ は分母 } b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \neq 0 \text{ を}$$

満たすところで連続であることがわかる .

## 2.2 複素微分可能性

平面の領域で定義された複素数を変数とする関数の微分可能性について考えてみましょう。

定義 2.2.1 (複素微分係数)

領域  $D$  で定義された複素数  $z$  を変数とする関数  $f(z)$  に対して,  $z_0 \in D$  で極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が存在するとき, この極限値を  $f'(z_0)$  または  $\frac{df}{dz}(z_0)$  で表し  $z_0$  での複素微分係数という:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

導関数 複素変数  $z$  に複素微分係数  $f'(z)$  を対応させる関数を  $f'(z)$  または  $\frac{df(z)}{dz}$  と表し,  $f(z)$  の (1 階) 導関数という. 導関数  $f'(z)$  の導関数  $\{f'(z)\}'$  を  $f''(z)$ ,  $f^{(2)}(z)$  または  $\frac{d^2 f(z)}{dz^2}$  と表し, ( $f(z)$  の) 2 階導関数という. 帰納的に,  $n-1$  階導関数  $f^{(n-1)}(z)$  の導関数  $\{f^{(n-1)}(z)\}'$  を  $f^{(n)}(z)$ , または  $\frac{d^n f(z)}{dz^n}$  と表し ( $f(z)$  の)  $n$  階導関数という.

定義 2.2.2 (正則関数) 領域  $D$  で定義された関数  $f(z)$  がすべての  $z \in D$  で複素微分可能でその導関数  $f'(z)$  が連続であるとき, 関数  $f(z)$  を ( $D$  上の) 正則関数<sup>1</sup>という.

例. 関数  $f(z) = z^n$  は  $\mathbb{C}$  で複素微分可能である ( $n \in \mathbb{N}$ ). 明らかに, どの  $z_0 \in \mathbb{C}$  でも

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})$$

より

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1} \right\} = n z_0^{n-1}$$

が成り立つから.

関数の複素微分係数については, つぎの定理が成り立つ.

定理 2.2.3 複素数  $z$  を変数とする関数  $f(z)$ ,  $g(z)$  が  $z$  で複素微分可能のときつぎのことが成り立つ:

<sup>1</sup> $D$  での複素微分可能性から  $f'(z)$  が  $D$  で連続であることが証明できる.

$$(1) \quad \{f(z) + g(z)\}' = f'(z) + g'(z) \quad (2) \quad \{\alpha f(z)\}' = \alpha f'(z) \quad (\alpha \in \mathbf{C})$$

上の (1) と (2) の性質を複素微分 (係数) の線形性という.

$$(3) \quad \{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$(4) \quad g'(z) \neq 0 \text{ のとき, } \left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \right\}' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

$$(5) \quad \text{複素数 } w \text{ を変数とする関数 } h(w) \text{ が } w (= f(z)) \text{ で複素微分可能のとき, 合成関数 } h(f(z)) \text{ は } z \text{ で複素微分可能で } \{h(f(z))\}' = h'(f(z))f'(z)$$

例. 関数  $f(z) = z$  は  $\mathbf{C}$  で複素微分可能であるから, 上の定理によってすべての有理関数

$$R(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0} \quad \text{は分母 } b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \neq 0 \text{ を}$$

満たすところで複素微分可能そしてそれ故に正則関数である. 明らかに,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^n &= n z^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \frac{d}{dz} 1 &= 0 \\ \frac{d}{dz} \frac{1}{z^n} &= -\frac{n}{z^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

例. 指数関数  $e^z$  は複素微分可能である.

$$\{e^z\}' = \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{e^{z+h+ik} - e^z}{h+ik} = e^z \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{e^{h+ik} - 1}{h+ik}$$

であるから,

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{e^{h+ik} - 1}{h+ik} = 1$$

を示せば  $\{e^z\}' = e^z$  が示される. それはつぎの様に示される.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{h+ik} - 1}{h+ik} - 1 \right| = \left| \frac{e^{h+ik} - 1 - h - ik}{h+ik} \right| = \left| \frac{e^h \cos k - 1 - h + i(e^h \sin k - k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ & \leq \left| \frac{e^h \cos k - 1 - h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{e^h \sin k - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ & \leq \left| \frac{e^h - 1 - h + e^h(\cos k - 1)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{e^h(\sin k - k) + (e^h - 1)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \\ & \leq \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left| \frac{e^h - 1 - h}{h} \right| + \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left| \frac{e^h(\cos k - 1)}{k} \right| + \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \left| e^h \left( \frac{\sin k}{k} - 1 \right) \right| + \frac{|(e^h - 1)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ & \leq \left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| + \left| \frac{e^h(\cos k - 1)}{k} \right| + \left| e^h \left( \frac{\sin k}{k} - 1 \right) \right| + |e^h - 1| \rightarrow 0 \quad (h, k \rightarrow 0). \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin k}{k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow 0), \quad \frac{\cos k - 1}{k} = -\sin \frac{k}{2} \cdot \frac{\sin \frac{k}{2}}{\frac{k}{2}} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0). \quad //$$

問題 2.2.4 つぎの関数の 1 階および 2 階の導関数を求めなさい。

$$(1) \quad 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \quad (2) \quad 1 + z + z^2 + \cdots + z^k + \cdots + z^n \quad (3) \quad \frac{1}{1-z}$$

定理 2.2.5 (複素微分可能性とコーシー・リーマン方程式)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (z = x + iy \in D \subset \mathbf{C})$$

は  $C^1$  級とする, すなわち,  $u(x, y)$  と  $v(x, y)$  は領域  $D$  で  $C^1$  級とする. このとき 関数  $f(z)$  が  $D$  で複素微分可能であるためには, つぎのコーシー・リーマン方程式が  $D$  で成り立つことが必要十分条件である:

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases} \quad (\text{Cauchy-Riemann Equations})$$

このとき, つぎが成り立つ:

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

証明 関数  $f(z)$  が  $D$  で複素微分可能であるとする. 複素微分係数の定義

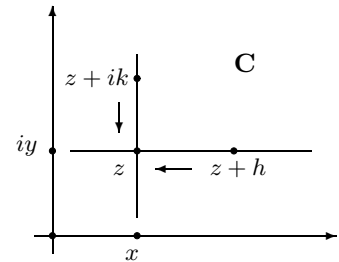
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

において, 複素数  $h \rightarrow 0$  の近づけ方として, 複素数  $h$  が実数として 0 に近づく場合および純虚数として 0 に近づく場合を考える.

まず, 複素数  $h$  が実数として 0 に近づくとき,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

となる.



一方, 複素数  $h$  が純虚数として 0 に近づくときには,  $h = ik$  ( $k \in \mathbf{R}$ ) と表すと

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} \quad (\because \mathbf{C} \text{ で } h = ik \rightarrow 0 \iff \mathbf{R} \text{ で } k \rightarrow 0) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i \lim_{ik \rightarrow 0} \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} (-i) \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} + i(-i) \lim_{ik \rightarrow 0} \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} \\ &= -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{aligned}$$

となる．関数  $f(z)$  は  $D$  で複素微分可能であるから  $f'(z)$  の値は唯1つであって

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = f'(z) = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

実部と虚部を比較して，コーシー・リーマン方程式が成り立っていることがわかる．

逆に， $D$  でコーシー・リーマン方程式が成り立っているとすると，

複素微分係数の定義

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

に現れる 0 に近づく複素数  $h$  を実部と虚部を明確にして複素数  $h + ik$  ( $h, k \in \mathbf{R}$ ) と表し，

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik}$$

を調べよう． $z = x + iy$  とし，つぎのように置く：

$$\begin{aligned} \Delta z &= h + ik \\ \Delta f &= f(z+h+ik) - f(z) \\ &= u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k) - u(x, y) - iv(x, y) \\ &= u(x+h, y+k) - u(x, y) + i(v(x+h, y+k) - iv(x, y)) \\ &= \Delta u + i\Delta v \end{aligned}$$

，ただし

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x+h, y+k) - u(x, y) \\ \Delta v &= v(x+h, y+k) - v(x, y). \end{aligned}$$

このとき，微分積分学における平均値の定理から，

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x+h, y+k) - u(x, y) \\ &= u(x+h, y+k) - u(x, y+k) + u(x, y+k) - u(x, y) \\ &= u_x(x+\theta_1 h, y+k)h + u_y(x, y+\theta_2 k) \quad (0 < \exists \theta_1, \theta_2 < 1). \end{aligned}$$

コーシー・リーマン方程式より， $u_y = -v_x$  なので，

$$\Delta u = u_x(x+\theta_1 h, y+k)h - v_x(x, y+\theta_2 k)$$

が得られる．同様に， $\Delta v$  に関しては，

$$\begin{aligned} \Delta v &= v(x+h, y+k) - v(x, y) \\ &= v(x+h, y+k) - v(x, y+k) + v(x, y+k) - v(x, y) \\ &= v_x(x+\theta_3 h, y+k)h + v_y(x, y+\theta_4 k) \quad (0 < \exists \theta_3, \theta_4 < 1). \end{aligned}$$

コーシー・リーマン方程式より， $u_x = v_y$  なので，

$$\Delta v = v_x(x+\theta_3 h, y+k)h + u_x(x, y+\theta_4 k)$$

が得られる．したがって，



$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\
&= \left\{ u_x(x + \theta_1 h, y + k)h - v_x(x, y + \theta_2 k)k \right\} + i \left\{ v_x(x + \theta_3 h, y + k)h + u_x(x, y + \theta_4 k)k \right\} \\
&= \left\{ u_x(x + \theta_1 h, y + k) + iv_x(x + \theta_3 h, y + k) \right\} h + i \left\{ u_x(x, y + \theta_4 k) + iv_x(x, y + \theta_2 k) \right\} k \\
&= \left\{ u_x(x + \theta_1 h, y + k) + iv_x(x + \theta_3 h, y + k) \right\} (h + ik) \\
&\quad - \left\{ u_x(x + \theta_1 h, y + k) + iv_x(x + \theta_3 h, y + k) \right\} ik + \left\{ u_x(x, y + \theta_4 k) + iv_x(x, y + \theta_2 k) \right\} ik \\
&= \left\{ u_x(x + \theta_1 h, y + k) + iv_x(x + \theta_3 h, y + k) \right\} \Delta z + iE(h, k)k
\end{aligned}$$

となる, ここで

$$E(h, k) = u_x(x, y + \theta_4 k) - u_x(x + \theta_1 h, y + k) + i \left\{ v_x(x, y + \theta_2 k) - v_x(x + \theta_3 h, y + k) \right\}.$$

故に

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{h, k \rightarrow 0} \left\{ u_x(x + \theta_1 h, y + k) + iv_x(x + \theta_3 h, y + k) \right\} + \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{E(h, k)ik}{h + ik}$$

が得られる. ここで

$$\left| \frac{E(h, k)ik}{h + ik} \right| \leq |E(h, k)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq |E(h, k)|$$

であることと  $u_x(x, y), v_x(x, y)$  の連続性より,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$$

がわかる. 故に関数  $f(z)$  は  $D$  で複素微分可能で

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y). \quad //$$

例 指数関数  $w = e^z$  は  $\mathbf{C}$  上の正則関数であり

$$\frac{de^z}{dz} = e^z$$

が成り立つことは, 指数関数  $w = e^z$  の実部と虚部が  $\mathbf{C}$  上でコーシー・リーマン方程式を満たすことからわかる. 1.4 指数関数  $e^z$  の定義から

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y \quad (z = x + iy \in \mathbf{C})$$

なので,

$$\begin{cases} u(x, y) = \operatorname{Re} e^z = e^x \cos y \\ v(x, y) = \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y \end{cases}$$

となる. したがって,

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) = e^x \cos y \\ u_y = -v_x = -e^x \sin y \end{cases}$$

が得られ,  $u(x, y), v(x, y)$  は  $\mathbf{C}$  上でコーシー・リーマン方程式をみたす. 故に

$$(e^z)' = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z. \quad //$$

複素数を変数とする三角関数

複素数を変数とする余弦関数  $\cos z$  と正弦関数  $\sin z$  を

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbf{C}) \end{aligned}$$

によって定義する. 合成関数の微分法則により,  $\cos z$  と  $\sin z$  は  $\mathbf{C}$  上の正則関数である.

$z = x + iy \in \mathbf{C}$  とおくと,

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

**命題 2.2.6**  $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$  に対して, つぎのことが成り立つ:

$$\begin{aligned} \cos(z + 2\pi) &= \cos z \\ \cos(-z) &= \cos z \\ \sin(z + 2\pi) &= \sin z \\ \sin(-z) &= -\sin z \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \\ \frac{d}{dz} \sin z &= \cos z \\ \frac{d}{dz} \cos z &= -\sin z. \end{aligned}$$

**問題 2.2.7** つぎの方程式を満たす複素数をすべて求めよ.

$$(1) \quad \cos z = 0 \qquad (2) \quad \sin z = 0 \qquad (3) \quad e^{2z} = 1 \qquad (4) \quad \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0.$$

複素数を変数とする対数関数

複素数の平面  $\mathbb{C}$  の領域  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  を考える.  $D$  は 0 および負の実数を除くすべての複素数の集合である. 複素対数の主値  $\text{Log } z$  は領域  $D$  上で関数 ( $\log z$  の分枝) を定義している.  $w = \text{Log } z$  ( $z \in D$ ) の複素微分係数を求めよう.

複素微分係数の定義式

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(z+h) - \text{Log } z}{h}$$

において  $w+k = \text{Log}(z+h)$ ,  $w = \text{Log } z$  と表すと  $z+h = e^{w+k}$ ,  $z = e^w$  が成り立ち,

$$\begin{aligned} k = \text{Log}(z+h) - \text{Log } z &= \log|z+h| + i \arg(z+h) - \log|z| - \arg z \\ &= \log\left|\frac{z+h}{z}\right| + i \arg(z+h) - \arg z \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成り立つ. 故に

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(z+h) - \text{Log } z}{h} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w+k-w}{e^{w+k} - e^w} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{w+k} - e^w}{k}} = \frac{1}{e^w} \\ &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

こうして

$$\frac{d}{dz} \text{Log } z = \frac{1}{z} \quad (z \in D).$$

領域  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  で定義された  $\sqrt[n]{z}$  の 1 つの分枝 ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$F(z) = \sqrt[n]{|z|} \left\{ \cos\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\text{Arg } z}{n}\right) \right\} = e^{\frac{1}{n} \text{Log } z}$$

は  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  上の連続関数でその複素微分係数は

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz} e^{\frac{1}{n} \text{Log } z} = z^{\frac{1}{n}-1} \quad (z \in D).$$

問題 2.2.8 つぎの正則関数  $w$  の導関数  $w'$  を計算しなさい. また正則関数  $w = u + iv$  の実部  $u$  と虚部  $v$  を求めよ, ただし  $z = x + iy$  とする.

$$(1) \quad w = \frac{i-z}{i+z} \qquad (2) \quad w = e^{\frac{1}{z}} \qquad (3) \quad w = e^z \sin z.$$

## 2.3 等角写像性

平面上の曲線

複素数平面  $\mathbb{C}$  上の曲線とは、区間  $[a, b]$  から  $\mathbb{C}$  の中への写像  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  のことである。

写像  $\gamma$  をこの曲線のパラメータ表示という。写像  $\gamma$  とこの像、すなわち、 $\{\gamma(t) \mid a \leq t \leq b\}$  とを同一視し、この像も  $\gamma$  で表す。

曲線  $\gamma$  には、 $\gamma(a)$  を始点にし、 $\gamma(b)$  を終点にする向きをつけることができる。

曲線  $C$  と反対向きの曲線を  $-C$  と書く。曲線  $-C$  のパラメータ表示  $\tilde{\gamma}$  は  $\gamma$  の表示  $\gamma$  を使って  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$  で与えられる、 $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(b)$  を始点にし、 $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(a)$  を終点にする曲線である。

直線のパラメータ表示 複素数  $z_0 = x_0 + iy_0$  と  $\alpha = a + ib (\neq 0)$  に対して、パラメータ表示

$$z(t) = z_0 + \alpha t \quad (-\infty < t < \infty)$$

は  $z_0$  を通る直線を表し、その  $\mathbb{R}^2 (= \mathbb{C})$  でのパラメータ表示は 
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty).$$

円のパラメータ表示 半径  $R$  の半円  $C$  のパラメータ表示は

$$z(t) = Re^{it} = R \cos t + iR \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

で与えられる。 $C$  には他のパラメータ表示もある： $z_1(t) = t + i\sqrt{R^2 - t^2} \quad (-R \leq t \leq R)$ 。

曲線  $C$  が連続とは、そのパラメータ表示  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) が連続、すなわち、関数  $x(t)$ 、 $y(t)$  が  $[a, b]$  上の連続関数であることとする。また、この曲線  $C$  が滑らかとは、関数  $x(t)$ 、 $y(t)$  が  $[a, b]$  上  $C^1$  級であることとする。

曲線  $C$  の点  $\gamma(t_0)$  ( $a \leq t_0 \leq b$ ) において、 $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0) \neq 0$  が成り立つとき、

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)t \quad (-\infty < t < \infty)$$

は曲線  $C$  の  $z(t_0)$  での接線を表している。このとき、複素数  $z'(t_0)$  は曲線  $C$  の  $z(t_0)$  での接ベクトル、すなわち、接線の方向ベクトルを表している。

定理 2.3.1 (合成関数の微分可能性) 領域  $D(\subset \mathbf{C})$  に含まれる曲線  $C : z(t) = x(t) + iy(t)$  ( $t \in [a, b] \subset \mathbf{R}$ ) を考える. 関数  $z(t)$  は  $C^1$  級, すなわち,  $x(t)$  と  $y(t)$  は閉区間  $[a, b]$  で  $C^1$  級とする. 関数  $f(z)$  ( $z \in D$ ) が領域  $D$  で正則であれば, 関数  $f(z(t))$  は  $[a, b]$  で微分可能で

$$\begin{cases} \{f(z(t))\}' = f'(z(t)) z'(t) \\ z'(t) = x'(t) + iy'(t) \end{cases}$$

が成り立つ:

証明  $\Delta z = f(z(t+h)) - f(z(t))$  ( $t, t+h \in [a, b]$ ) と置いて,

$$\begin{aligned} \{f(z(t))\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z(t+h)) - f(z(t))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z(t+h)) - f(z(t))}{z(t+h) - z(t)} \cdot \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z(t+\Delta z)) - f(z(t))}{\Delta z} \cdot \frac{x(t+h) - x(t) + i(x(t+h) - x(t))}{h} \\ &= f'(z(t)) \cdot (x'(t) + iy'(t)). \quad // \end{aligned}$$

さて, 正則関数  $f(z)$  が  $z_0$  を通る直線をどのような曲線に写すかを考えてみよう. 直線を

$$L_\alpha : z(t) = z_0 + \alpha t \quad (-\infty < t < \infty), \quad (0 \neq) \alpha \in \mathbf{C}$$

とし,  $f(z)$  によって写された曲線

$$\gamma : \gamma(t) = f(z_0 + \alpha t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

を考える.

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \alpha(t+h)) - f(z_0 + \alpha t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \alpha t + \alpha h) - f(z_0 + \alpha t)}{\alpha h} \cdot \frac{\alpha(t+h) - \alpha t}{h} \\ &= f'(z_0 + \alpha t) \cdot \alpha \quad (-\infty < t < \infty) \end{aligned}$$

であるから,

$$\gamma'(0) = f'(z_0) \cdot \alpha$$

が成り立つ. 今,  $f'(z_0) \neq 0$  のときを考える.

この場合, 曲線  $\gamma$  の  $f(z_0)$  での接線は

$$z(t) = f(z_0) + f'(z_0)\alpha t \quad (-\infty < t < \infty)$$

であることがわかる.

正則関数  $f(z)$  が,  $z_0$  を通る直線  $L_\alpha$  を  $f(z_0)$  通る曲線  $\gamma$  に写しているとき,  $\gamma$  の  $f(z_0)$  での

接線の方向ベクトルは直線  $L_\alpha$  の方向ベクトル  $\alpha$  を回転した複素数  $f'(z_0)\alpha$  で与えられる.

今、もう一つの直線

$$L_\beta : z(t) = z_0 + \beta t \quad (-\infty < t < \infty), \quad (0 \neq) \beta \in \mathbf{C}$$

と  $f(z)$  によって写された曲線

$$\mu : \mu(t) = f(z_0 + \beta t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

を考えると、曲線  $\mu$  の  $f(z_0)$  での接線は

$$z(t) = f(z_0) + f'(z_0)\beta t \quad (-\infty < t < \infty)$$

となる。

曲線  $\gamma$  と  $\mu$  の  $f(z_0)$  での接線の方向ベクトルは、直線  $L_\alpha$

と  $L_\beta$  の  $z_0$  での方向ベクトルを複素数  $f'(z_0)$  で回転した

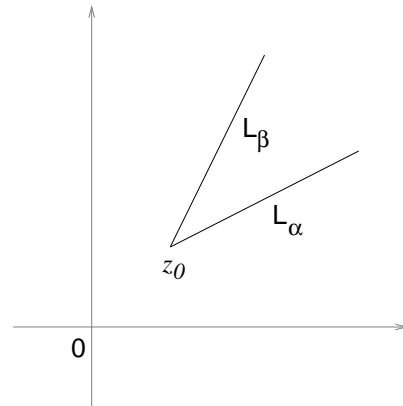
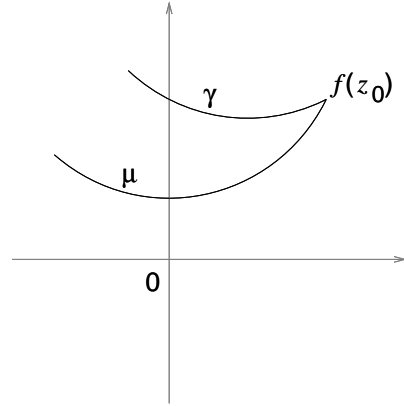
ものであるから、曲線  $\gamma$  と  $\mu$  の  $f(z_0)$  での接線のなす角

は直線  $L_\alpha$  と  $L_\beta$  が  $z_0$  でなす角に同じである。

正則写像  $f(z)$  は ( $f'(z_0) \neq 0$  のとき)  $z_0$  で角を保つ写像

であることがわかる；正則写像はその導関数が 0 とならな

い所で等角写像である。



平行線からなる格子はどのように写るか

例. 平行線からなる格子の関数  $w = f(z) = z^2$  による像を調べよう。

実軸に平行な直線  $y = y_0$  ( $y_0 \in \mathbf{R}$ ) の族と、虚軸に平行な直線  $x = x_0$  ( $x_0 \in \mathbf{R}$ ) の族を考える。

直線  $y = y_0$  上の点  $z = x + iy_0$  の  $f$  による像は

$$w = u + iv = (x + iy_0)^2 = x^2 + 2ixy_0 - y_0^2$$

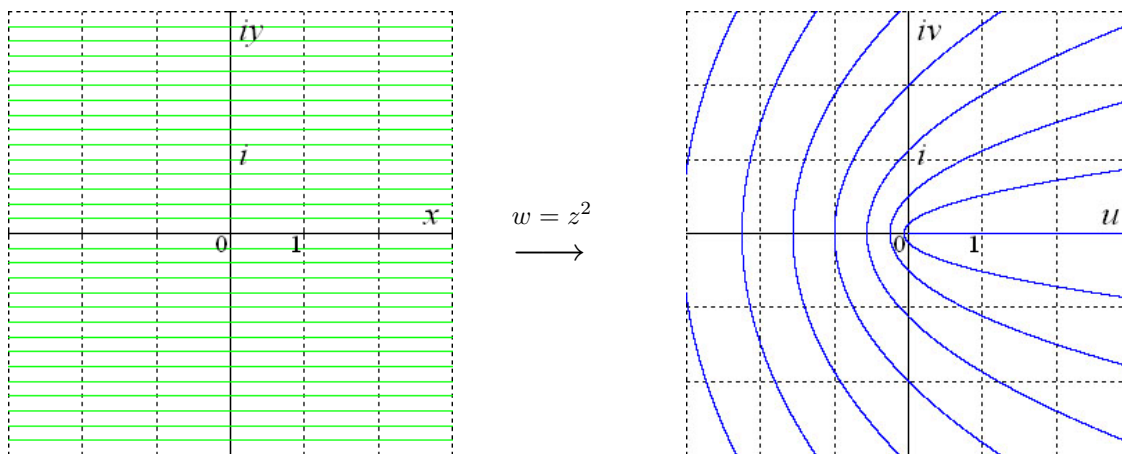
$$u = x^2 - y_0^2$$

$$v = 2xy_0.$$

$y_0 = 0$  のとき、実軸の非負の部分  $u \geq 0$ ,  $v = 0$  .

$y_0 \neq 0$  のとき、放物線  $u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$  .

実軸に平行な直線  $y = y_0$  を  $w = z^2$  で変換した像は、次図のようになる。



同様にして、直線  $x = x_0$  上の点  $z = x_0 + iy$  の像は

$$w = u + iv = x_0^2 + 2ix_0y - y^2$$

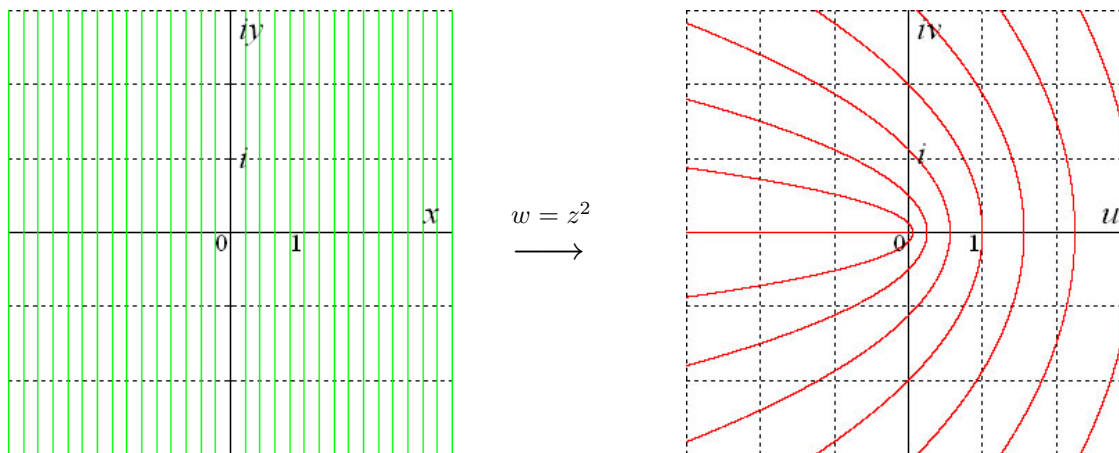
$$u = x_0^2 - y^2$$

$$v = 2x_0y$$

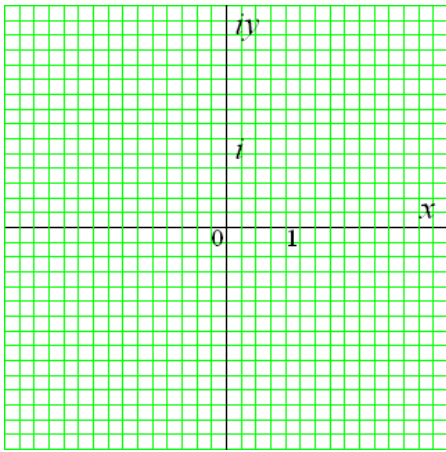
$x_0 = 0$  のとき、実軸の非正の部分  $u \leq 0, v = 0$

$x_0 \neq 0$  のとき、放物線  $u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$  .

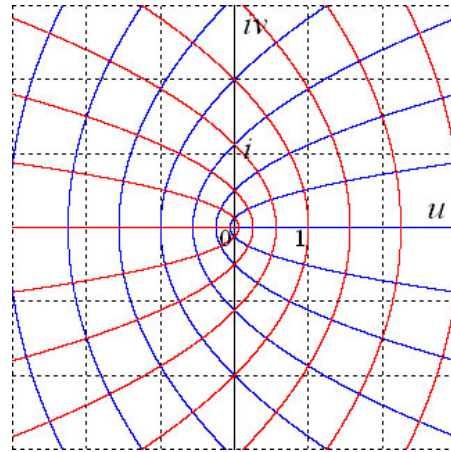
虚軸に平行な直線  $x = x_0$  を  $w = z^2$  で変換した像は、下図のようになる .



平面  $C$  における虚軸に平行な直線の族、実軸に平行な直線族を関数  $w = z^2$  によって写像した像は次図のようになる。



$$w = z^2$$



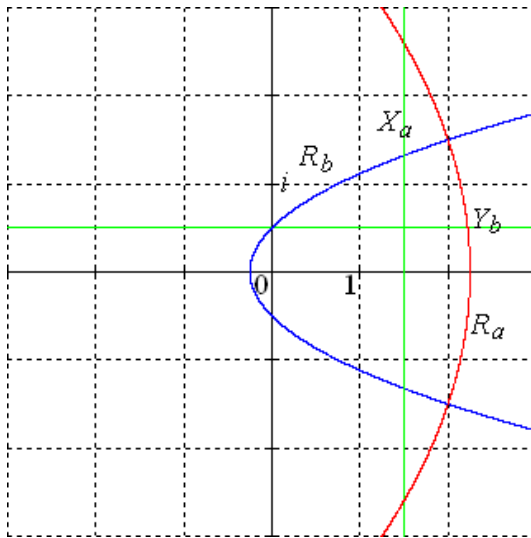
等角写像性について

$f(z) = z^2$  より,  $z = x + iy$  とすると,

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy. \end{aligned}$$

$xy$  平面上で直線  $X_a : x = a$ ,  $Y_b : y = b$  を考える.

関数  $w = z^2$  による  $X_a$  の像を  $R_a$ ,  $Y_b$  の像を  $R_b$  とおく. (次図)



$$R_a : u = u(a, t), v = v(a, t)$$

$$R_b : u = u(t, b), v = v(t, b)$$

$(u_0, v_0) = (u(a, b), v(a, b))$  での接線の傾きは, それぞれ,

$$\frac{v_y(a, b)}{u_y(a, b)} = \frac{2x}{-2y}, \quad \frac{v_x(a, b)}{u_x(a, b)} = \frac{2y}{2x}$$

であるから

$$\frac{2x}{-2y} \cdot \frac{2y}{2x} = -1.$$



これは曲線  $R_a$  および  $R_b$  の接線が互いに直角に交わることを示している .

例. 平行線からなる格子の関数  $w = f(z) = \frac{1}{z}$  による像を調べよう .

実軸に平行な直線  $y = y_0$  ( $y_0 \in \mathbf{R}$ ) の族と、虚軸に平行な直線  $x = x_0$  ( $x_0 \in \mathbf{R}$ ) の族を考える .

直線  $y = y_0$  上の点  $z = x + iy_0$  の像は

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{x + iy_0} = \frac{x - iy_0}{x^2 + y_0^2} \\ u &= \frac{x}{x^2 + y_0^2} \\ v &= -\frac{y_0}{x^2 + y_0^2} . \end{aligned}$$

$y_0 \neq 0$  のとき

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y_0^2}{(x^2 + y_0^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y_0^2} = -\frac{v}{y_0}$$

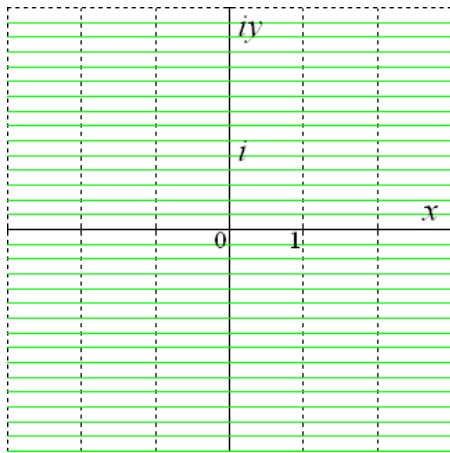
であるから,

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2y_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{2y_0}\right)^2 .$$

$y_0 = 0$  のとき, 実軸の非 0 の部分  $u \neq 0, v = 0$  .

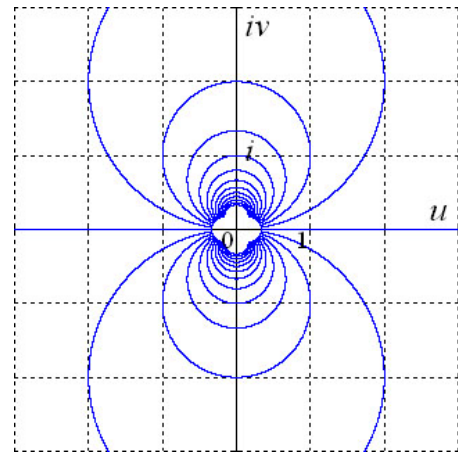
$y_0 \neq 0$  のとき, 円  $u^2 + \left(v + \frac{1}{2y_0}\right)^2 = \left(\frac{1}{2y_0}\right)^2$  .

実軸に平行な直線  $y = y_0$  を  $w = \frac{1}{z}$  で変換した像は, 下図のようになる .



$$w = \frac{1}{z}$$

→



同様に, 直線  $x = x_0$  上の点  $z = x_0 + iy$  の像は

$$w = f(x_0 + iy) = \frac{1}{x_0 + iy} = \frac{x_0 - iy}{x_0^2 + y^2}$$

$$w = u + iv = \frac{1}{x_0 + iy} = \frac{x_0 - iy}{x_0^2 + y^2}$$

$$u = \frac{x_0}{x_0^2 + y^2}$$

$$v = -\frac{y}{x_0^2 + y^2}$$

$x_0 \neq 0$  のとき

$$u^2 + v^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} = -\frac{u}{x_0}$$

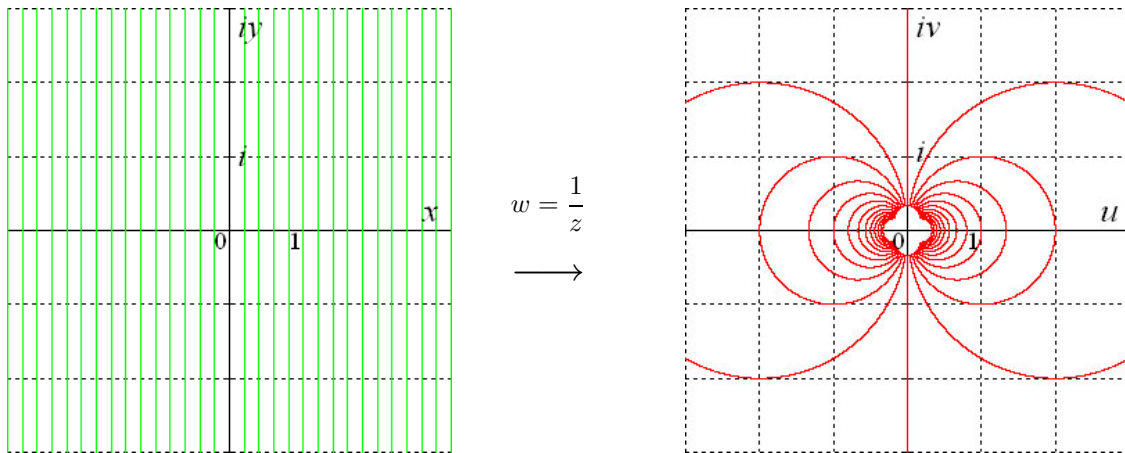
であるから,

$$\left(u + \frac{1}{2x_0}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2.$$

$x_0 = 0$  のとき, 虚軸の非 0 の部分  $v \neq 0$ ,  $u = 0$  .

$x_0 \neq 0$  のとき, 円  $\left(u + \frac{1}{2x_0}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2x_0}\right)^2$  .

虚軸に平行な直線  $x = x_0$  を  $w = \frac{1}{z}$  で変換した像は, 下図のようになる .

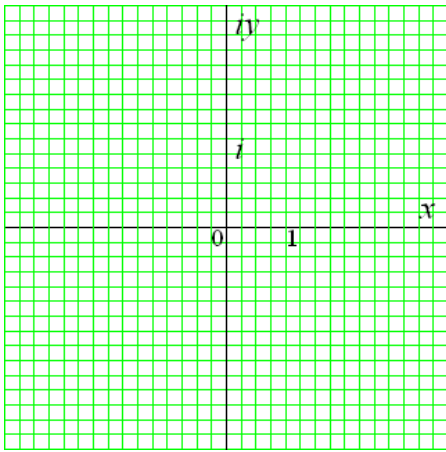


平面  $C$  における虚軸に平行な直線の族, 実軸に平行な直線族を関数  $w = \frac{1}{z}$  によって写像した像は次頁の図のようになる .

等角写像性について

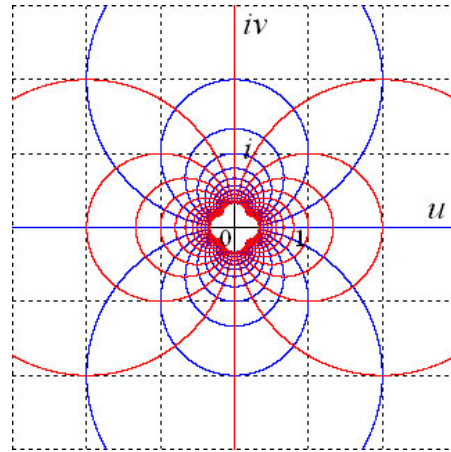
$f(z) = \frac{1}{z}$  より,  $z = x + iy$  とすると,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$



$$w = \frac{1}{z}$$

→

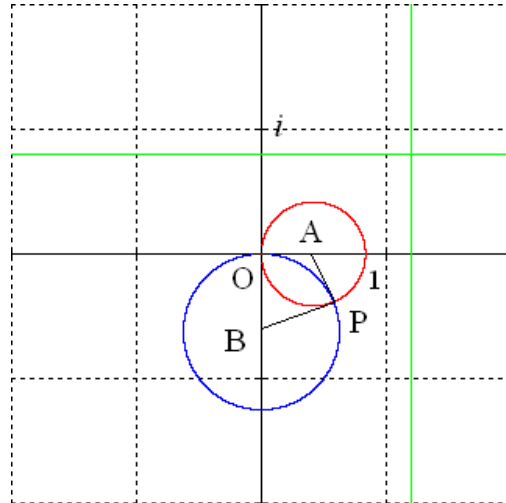


$xy$  平面上で直線  $X_s : x = s$ ,  $Y_t : y = t$  を考える .

関数  $w = \frac{1}{z}$  による  $X_s$  の像を  $Cx_s$ ,  $Y_t$  の像を  $Cy_t$  とおく . (次図)

$Cx_s$  : 中心  $A(-\frac{1}{2s})$ , 半径  $\frac{1}{2|s|}$  の円

$Cy_t$  : 中心  $B(-\frac{i}{2t})$ , 半径  $\frac{1}{2|t|}$  の円



二つの円の交点  $P$  と原点  $O$  から三角形  $\triangle OAB$  と  $\triangle PAB$  を考える .

これらの二つの三角形は対応する三辺の長さ等しいので合同であるから , 対応する角

$$\angle APB = \angle AOB = \text{直角} .$$

明らかに , 直線  $AP$  は円  $Cy_t$  の点  $P$  での接線 , また直線  $BP$  は円  $Cx_s$  の点  $P$  での接線である .

二つの円の交点における円のそれぞれの接線が直交するしているから , これらの二つの円は直交している .

等角写像性が確かめられた .

## 2.4 線積分と Green の定理

### 線積分

平面  $\mathbf{R}^2$  のある領域で定義された関数  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  とこの領域内にある滑らかな曲線

$$C : x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

を考える．ここで曲線が滑らかとは，

関数  $x(t)$ ,  $y(t)$  が  $C^1$  級で

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0 \quad (a \leq t \leq b)$$

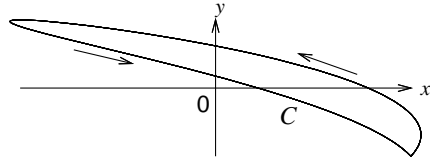
という意味である．定積分

$$\int_a^b f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) dt$$

を曲線  $C$  に沿っての (一次微分形式  $f(x, y)dx + g(x, y)dy$  の) 線積分といい

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

と表す．



線積分はつぎの性質を持つ：

- (1) 曲線  $C$  の向きを変えないパラメータの変換  $t = \varphi(\tau)$  ( $\alpha \leq \tau \leq \beta$ ),  $\varphi'(\tau) > 0$ ) を行っても線積分の値は変わらない．すなわち

$$\begin{cases} \tilde{x}(\tau) = x(\varphi(\tau)) \\ \tilde{y}(\tau) = y(\varphi(\tau)) \end{cases} \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta)$$

のとき，置換積分法から

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy &= \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) dt \\ &= \int_\alpha^\beta \{f(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)))x'(\varphi(\tau)) + g(x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)))y'(\varphi(\tau))\}\varphi'(\tau) d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta f(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{x}'(\tau) + g(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{y}'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

- (2) 曲線  $C$  の向きを変えるパラメータの変換  $t = a + b - \tau$  ( $a \leq \tau \leq b$ ) を行うと線積分の値は  $-1$  倍される．すなわち，曲線  $C$  の向きを変えたものを  $-C$  と表すと

$$\begin{cases} \tilde{x}(\tau) = x(a + b - \tau) \\ \tilde{y}(\tau) = y(a + b - \tau) \end{cases} \quad (a \leq \tau \leq b)$$

のとき，置換積分法から

$$\begin{aligned}
-\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy &= \int_b^a f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) dt \\
&= \int_a^b \{f(x(a+b-\tau), y(a+b-\tau))x'(a+b-\tau) \\
&\quad + g(x(a+b-\tau), y(a+b-\tau))y'(a+b-\tau)\}(-1) d\tau \\
&= \int_b^a f(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{x}'(\tau) + g(\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau))\tilde{y}'(\tau) d\tau \\
&= \int_{-C} f(x, y)dx + g(x, y)dy
\end{aligned}$$

(3) 曲線  $C$  が二つの曲線

$$C_1 : x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq c), \quad C_2 : x = x(t), y = y(t) \quad (c \leq t \leq b)$$

に分割されるとき

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_{C_1} f(x, y)dx + g(x, y)dy + \int_{C_2} f(x, y)dx + g(x, y)dy.$$

(4) 一次微分形式についての線形性

二つの一次微分形式  $f_1(x, y)dx + g_1(x, y)dy$  と  $f_2(x, y)dx + g_2(x, y)dy$  について

$$\begin{aligned}
&\int_C \{f_1(x, y)dx + g_1(x, y)dy\} + \alpha \{f_2(x, y)dx + g_2(x, y)dy\} \\
&= \int_C f_1(x, y)dx + g_1(x, y)dy + \alpha \int_C f_2(x, y)dx + g_2(x, y)dy \quad (\alpha \in \mathbf{R}).
\end{aligned}$$

### C. Green の定理

定理 2.4.1 (Green)  $\Omega$  を  $\mathbf{R}^2$  の有界領域とし, その境界  $\partial\Omega$  は有限個の区分的に滑らかな曲線からなる単純閉曲線<sup>2</sup>であるとする. 関数  $f(x, y), g(x, y)$  が  $\Omega$  で  $C^1$  級のとき,

$$\int_{\partial\Omega} -g(x, y)dx + f(x, y)dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Green の公式})$$

が成り立つ, ただし 境界  $\partial\Omega$  に沿っての線積分は正の (領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む) 向きに積分する.

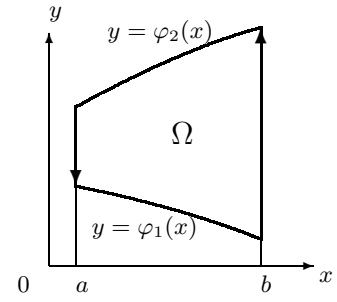
証明 二つの連続関数  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) によって定義される領域

<sup>2</sup>単純閉曲線とは始点=終点となり閉じているが, 自分自身とは交わらない曲線のことである.

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} -g(x, y)dx &= \int_a^b -g(x, \varphi_1(x)) dx + \int_a^b g(x, \varphi_2(x)) dx \\ &= \int_a^b g(x, \varphi_2(x)) - g(x, \varphi_1(x)) dx \\ &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial g}{\partial y} dy dx = \iint_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$



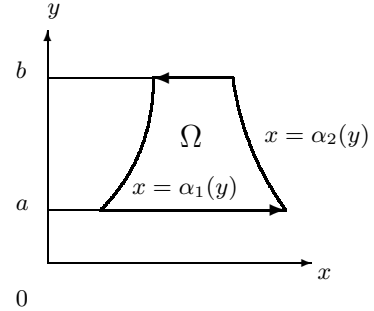
つぎに, 二つの連続関数  $\alpha_1(y) \leq \alpha_2(y)$  ( $a \leq y \leq b$ )

によって定義される領域

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \alpha_1(y) \leq x \leq \alpha_2(y) \right\}$$

上の連続関数  $f(x, y)$  に対して

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} f(x, y)dy &= -\int_a^b f(\alpha_1(y), y) dy + \int_a^b f(\alpha_2(y), y) dy \\ &= \int_a^b -f(\alpha_1(y), y) + f(\alpha_2(y), y) dy = \int_a^b \int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$



故に, 領域  $\Omega$  が縦線領域かつ横線領域であるときには,

$$\int_{\partial\Omega} -g(x, y)dx + f(x, y)dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy$$

が成り立つ.

Green の定理 における有界領域  $\Omega$  は縦線かつ横線領域  $\Omega_{i,j}$

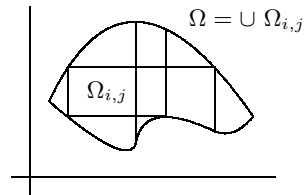
の和に分割されることに注意する. このとき,

領域  $\Omega$  の内部にある  $\partial\Omega_{i,j}$  の境界上では, 隣りあう領域の境界  $\partial\Omega_{i',j'}$  と向きが反対である

から線積分の値は互いに消しあって  $\partial\Omega$  上の線積分の値が残る.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} -g(x, y)dx + f(x, y)dy &= \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega_{i,j}} -g(x, y)dx + f(x, y)dy \\ &= \sum_{i,j} \iint_{\Omega_{i,j}} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

が成り立つ, ただし 境界  $\partial\Omega$  に沿っての線積分は正の (領域  $\Omega$  の内部を左に見て進む) 向きに積分する. //



## 2.5 複素積分

複素関数の積分について考える。

領域  $D$  上の滑らかな曲線  $C$  と曲線  $C$  上で定義された連続関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z =$

$x + iy \in C$ ) に対して,  $C$  に沿う複素積分  $\int_C f(z)dz$  を線積分を使って

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

と定義する。

この複素積分の定義は  $f(z)dz$  を形式的に

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ dz &= dx + idy \\ f(z) dz &= (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) \\ &= u(x, y)dx - v(x, y)dy + i(v(x, y)dx + u(x, y)dy) \end{aligned}$$

と考えると, それらの実部と虚部を線積分するものであると考えることができる。

曲線  $C$  のパラメータ表示が  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) のとき

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \\ &= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt + i \int_a^b \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\} dt \end{aligned}$$

である。

線積分は曲線  $C$  の向きを変えないパラメータの取りかえによらないから, 複素積分も曲線  $C$  の向きを変えないパラメータの取り方には依存しない。また, 区分的に滑らかな曲線  $C$  の場合, すなわち  $C$  が有限個の滑らかな曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の和のときは

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)dz$$

で定義する。

複素積分は, 上記の定義に従って, 線積分に分解して計算されるのであるが, 正則関数の複素積分は以下に示すように正則関数の複素微分可能性に基づいて自然な形で計算される。

## 複素積分の計算法

曲線  $C$  のパラメータ表示  $z(t) = x(t) + iy(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) に対して

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

または、つぎのようにも書く

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) + i \frac{dy}{dt}(t)$$

と定める。このとき、つぎが成り立つ:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt .$$

さらに、 $M = \max_{z \in C} |f(z)|$  に対して

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \leq M \times (C \text{ の長さ}) .$$

証明

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b \left\{ u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \right\} dt + i \int_a^b \left\{ v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t) \right\} dt \\ &= \int_a^b \left\{ u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)) \right\} \left\{ x'(t) + iy'(t) \right\} dt = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \end{aligned}$$

が得られる。つぎに、曲線  $C$  上の複素積分の値を  $\int_C f(z) dz = Re^{i\theta}$  ( $\exists R \geq 0, \exists \theta \in \mathbf{R}$ ) と表すと

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= e^{-i\theta} \int_C f(z) dz = \int_C e^{-i\theta} f(z) dz = \operatorname{Re} \int_C e^{-i\theta} f(z) dz \\ &= \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(z(t)) z'(t)) dt \\ &= \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt = \int_a^b |f(z(t))| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &\leq \int_a^b M \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = M \cdot (C \text{ の長さ}) . \quad // \end{aligned}$$

### 命題 2.5.1

領域  $D$  内の滑らかな曲線  $C$  と領域  $D$  上で定義された正則関数  $f(z)$  に対して、

$$\int_C f'(z) dz = [f(z)]_\alpha^\beta = f(\beta) - f(\alpha).$$

が成り立つ、ただし曲線  $C$  の始点を  $\alpha$ 、終点を  $\beta$  とする。

証明 正則関数を  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy \in D$ )、曲線  $C$  のパラメータ表示を



$z(t) = x(t) + iy(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ) とする . ただし  $\alpha = z(a)$ ,  $\beta = z(b)$  .

正則関数  $f(z)$  は複素微分可能で  $f'(z(t)) = u_x(x(t), y(t)) + iv_x(x(t), y(t))$  であるから ,

$$\begin{aligned} \int_C f'(z) dz &= \int_a^b \left\{ u_x(x(t), y(t))x'(t) - v_x(x(t), y(t))y'(t) \right\} dt + i \int_a^b \left\{ v_x(x(t), y(t))x'(t) + u_x(x(t), y(t))y'(t) \right\} dt \\ &= \int_a^b \left\{ u_x(x(t), y(t))x'(t) + u_y(x(t), y(t))y'(t) \right\} dt + i \int_a^b \left\{ v_x(x(t), y(t))x'(t) + v_y(x(t), y(t))y'(t) \right\} dt \\ &\quad (\text{Cauchy-Riemann 方程式 } u_x = v_y, u_y = -v_x \text{ より}) \\ &= \int_a^b \frac{du(x(t), y(t))}{dt} dt + i \int_a^b \frac{dv(x(t), y(t))}{dt} dt \\ &= \left[ u(x(t), y(t)) \right]_a^b + i \left[ v(x(t), y(t)) \right]_a^b \\ &= \left[ u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) \right] + i \left[ v(x(b), y(b)) - v(x(a), y(a)) \right] \\ &= f(z(b)) - f(z(a)) = f(\beta) - f(\alpha). \quad // \end{aligned}$$

複素積分の定義から容易につきの定理が得られる .

定理 2.5.2 (複素積分の基本的性質) 複素積分は次の基本的性質を持つ :

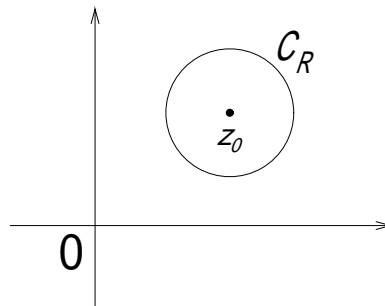
- (1)  $\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$
- (2)  $\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$
- (3)  $\int_C cf(z) dz = c \int_C f(z) dz$  ( $c$  は定数)
- (4)  $\int_C f_1(z) dz + \int_C f_2(z) dz = \int_C (f_1(z) + f_2(z)) dz$

例 . 中心が  $z_0$  で半径が  $R$  の円周  $C_R: |z - z_0| = R$  と

任意の整数  $n$  に対して ,

$$\int_{C_R} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}$$

が成り立つ . ただし ,  $C_R$  の向きは反時計方向とする .



証明 円周  $C_R$  のパラメータ表示は  $z(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  で与えられる. 従って

$$\begin{aligned} \int_{C_R} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^n \frac{dz(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R^n e^{in\theta} Re^{i\theta} i d\theta \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \\ &= iR^{n+1} \int_0^{2\pi} \left\{ \cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta \right\} d\theta. \end{aligned}$$

$n = -1$  のときは

$$\int_{C_R} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i .$$

$n \neq -1$  のときは

$$\int_{C_R} (z - z_0)^n dz = iR^{n+1} \left[ \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} - i \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0. \quad //$$

### コーシーの積分定理

区分的に滑らかな単純閉曲線  $C$  と  $C$  で囲まれた領域  $D$  を考える. 曲線  $C$  と領域  $D$  を含む

領域  $\Omega$  で定義された正則関数  $f(z)$  に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

証明 正則関数の実部と虚部を与える二変数関数はコーシー・リーマン方程式をみたすので,

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy \in \Omega$ ) とするとグリーンの公式より

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \\ &= \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= 0. \quad // \end{aligned}$$

注意. 定理 区分的に滑らかな単純閉曲線  $C$  と  $C$  で囲まれた領域  $D$  を考える. 曲線  $C$  と領域

$D$  を含む領域  $\Omega$  で定義された  $C^1$  級関数  $f(z)$  に対して

$$\int_C f(z) dz = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy$$

が成り立つ。ただし  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  のとき

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right\} (u + iv) = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}.$$

証明  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy \in \Omega$ ) とするとグリーンの公式より

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy \\ &= \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= i \left\{ \iint_D i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \right\} \\ &= 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy. \quad // \end{aligned}$$

系 区分的に滑らかな単純閉曲線  $C$  と  $C$  で囲まれた領域  $D$  に対して

$$-\frac{i}{2} \int_C \bar{z} dz = \iint_D dx dy = D \text{ の面積.}$$

この系は,  $-\frac{i}{2} \int_C \bar{z} dz = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy$  という関係とグリーンの公式によって面積を求める

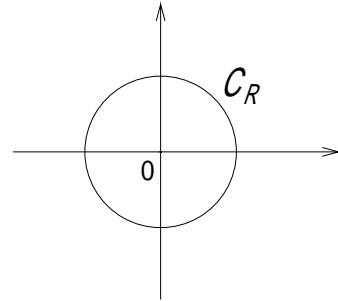
公式  $\int_C x dy = \int_C -y dx = \iint_D dx dy = D$  の面積 が結びついて成り立っている.

例.  $0$  を中心とし半径  $R$  の開円板  $D_R$  を考える. 円周  $C_R : z = Re^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) 上で

$$x = R \cos \theta, \quad \frac{dy}{dx} = R \cos \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_{C_R} x dy &= \int_0^{2\pi} (R \cos \theta) R \cos \theta d\theta = R^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta \\ &= R^2 \left[ \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi R^2 = \iint_{D_R} dx dy. \quad // \end{aligned}$$



コーシーの積分公式

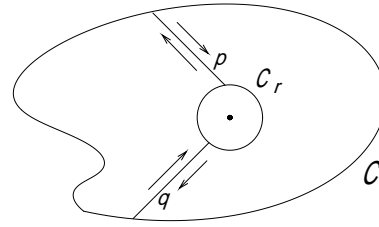
区分的に滑らかな単純閉曲線  $C$  と  $C$  で囲まれた領域  $D$  を考える. 曲線  $C$  と領域  $D$  を含む領域

$\Omega$  で定義された正則関数  $f(z)$  に対して, つぎのことが成り立つ:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \quad (\alpha \in D).$$

証明 任意の  $\alpha \in D$  を取り,  $\alpha$  を中心とし半径  $r$

の  $D$  内にある円周  $C_r : z = \alpha + re^{it} (0 \leq t < 2\pi)$  と



開円板  $\Delta_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - \alpha| < r\}$  を考える. 関数  $\frac{f(z)}{z - \alpha}$  は  $\Omega \setminus \{\alpha\}$  で正則であるから,

$\bar{D} \setminus \Delta_r$  にコーシーの積分定理を適用して

$$\int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 0, \text{ すなわち } \int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz$$

が得られる.

[これが成り立つことは, 上の図が表すことを考えてわかる: 曲線  $C$  上の点から円周  $C_r$  上の点へ結ぶ区分的に滑らかな曲線  $p$  を ( $C$  で囲まれた領域内, 円周  $C_r$  で囲まれた円の外部を通過して) 取る. 円周  $C_r$  上の点から曲線  $C$  上の点へ結ぶ区分的に滑らかな曲線  $q$  を  $p$  と交わらないように ( $C$  で囲まれた領域内, 円周  $C_r$  で囲まれた円の外部を通過して) 取る.

曲線  $C$  の部分を正の向きに回って橋  $p$  を通ったあとで円周  $C_r$  の部分を負の向きに回り橋  $q$  を通って単純閉曲線  $C_1$  ができる. また曲線  $C$  の部分を正の向きに回って橋 (逆向きに)  $-q$  を通ったあとで円周  $C_r$  の部分を負の向きに回り橋 (逆向きに)  $-p$  を通って単純閉曲線  $C_2$  ができる.

このとき, 橋  $p$  と  $q$  上での複素積分は行き帰りで相殺して 0 となるので, コーシーの積分定理により

$$\int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = 0$$

が成り立つ.]

さて

$$\int_{C_r} \frac{1}{z - \alpha} dz = 2\pi i$$

であるから,

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - 2\pi i f(\alpha) \right| &= \left| \int_{C_r} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{it}) - f(\alpha)}{re^{it}} ire^{it} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} \{f(\alpha + re^{it}) - f(\alpha)\} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{2\pi} \max_{0 \leq t < 2\pi} |f(\alpha + re^{it}) - f(\alpha)| dt \right| \\ &= 2\pi \max_{0 \leq t < 2\pi} |f(\alpha + re^{it}) - f(\alpha)| \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0). \end{aligned}$$

これは  $\int_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - 2\pi i f(\alpha) = 0$  を意味している. //

コーシーの積分公式からは多くの事実が導かれる.

### コーシーの積分表示式

領域  $D$  で定義された正則関数  $f(z)$  を考える.  $\alpha$  を中心とする半径  $r > 0$  の閉円板  $\overline{\Delta}(\alpha, r)$  が  $D$  に含まれるとき,

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \quad (\alpha \in D)$$

が成り立つ.

### コーシーの評価式

領域  $D$  で定義された正則関数  $f(z)$  を考える.  $\alpha$  を中心とする半径  $r > 0$  の閉円板  $\overline{\Delta}(\alpha, r)$  が  $D$  に含まれるとき,  $M(r) = \max_{z \in \overline{\Delta}(\alpha, r)} |f(z)|$  に対して

$$|f^{(n)}(\alpha)| = \frac{n!}{r^n} M(r) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ.

### 問題 2.5.3

(1) 線分  $L: z = t$  ( $-R \leq t \leq R$ ) に引き続く半円周  $C_R: z = Re^{it}$  ( $0 \leq t \leq \pi$ )

から成る閉曲線を  $C$  とする.

$R > 1$  のとき  $\int_C \frac{1}{z-i} dz$  と  $\int_C \frac{1}{z+i} dz$  を求めよ. また  $\int_C \frac{1}{1+z^2} dz$  を求めよ.

(2) 線分  $L_R: z = r \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $0 \leq r \leq R$ ) とする.  $\int_{L_R} e^{-z^2} dz$  はどんな定積分で表されるか.

## 演習問題 2

1 領域  $D$  で定義された正則関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy \in D$ ) の導関数  $f'(z)$  に

対して, つぎの事実を示せ:

$$|f'(z)|^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.$$

2 (1) 複素数  $z$  が  $\operatorname{Re} z = x_0$  の直線上を動くとき,  $w = \cos z$  はどんな図形をえがくか, ここで  $x_0 \in \mathbf{R}$ .

(2) 複素数  $z$  が  $\operatorname{Im} z = y_0$  の直線上を動くとき,  $w = \cos z$  はどんな図形をえがくか, ここで  $y_0 \in \mathbf{R}$ .

3 複素数  $z$  に対する双曲線関数を

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

と定義する. このとき, つぎのことが成り立つ:

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1 \\ \cosh iz &= \cos z, & \cos iz &= \cosh z \\ \sinh iz &= i \sin z, & \sin iz &= i \sinh z \\ \frac{d}{dz} \cosh z &= \sinh z \\ \frac{d}{dz} \sinh z &= \cosh z. \end{aligned}$$

4 正則関数  $f(z)$  の導関数  $f'(z) \neq 0$  のとき,

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2 = \frac{2f'f''' - 3\{f''\}^2}{2\{f'^2\}}$$

は Schwarz の導関数とよばれる. つぎの関数 ( $c \neq 0 \in \mathbf{C}$ ) の Schwarz の導関数を計算しなさい.

(1)  $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  ( $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \in \mathbf{C}$ )      (2)  $e^{cz}$       (3)  $cz^n$  ( $0 \neq n \in \mathbf{Z}$ )      (4)  $\cos cz$

(5)  $\tan cz$       (6)  $\operatorname{Log} z$ .

## 第3章 応用

### 3.1 写像の反復と収束

複素数  $c$  に対して、多項式  $f_c(z) = z^2 + c$  を考える。

合成関数

$$f_c^2(z) = f_c(f_c(z)) = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2cz^2 + c^2 + c$$

を初めとして、つぎつぎに合成を繰り返して合成関数

$$\begin{aligned} f_c^3(z) &= f_c(f_c^2(z)) = f_c(f_c(f_c(z))) = (z^4 + 2cz^2 + c^2 + c)^2 + c \\ &= z^8 + 4cz^6 + 2c(3c+1)z^4 + 4c^2(c+1)z^2 + c^4 + 2c^3 + c^2 + c \\ f_c^4(z) &= f_c(f_c^3(z)) = f_c(f_c(f_c(f_c(z)))) \\ &\vdots \\ f_c^n(z) &= f_c(f_c^{n-1}(z)) = f_c(f_c(\cdots(f_c(z))\cdots)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

を考える。

(この章では、 $f_c^2(z)$  で積  $f_c(z) \cdot f_c(z)$  ではなく合成関数  $f_c(f_c(z))$  を表している。同様に、 $f_c^n(z)$  も合成関数を表している。)

このとき、例えば 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0)$$

はどうかだろうか。

$c = 0$  のとき、明らかに  $f_0^n(z) = z^{2^n}$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_0^n(0) = 0.$$

$|c| > 2$  のときを考える。

各  $f_c^n(0)$  を複素数  $\delta_n$  によって  $f_c^n(0) = \delta_n c$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) と表すと、

$$\begin{aligned}
f_c(0) &= c = \delta_1 c \\
|\delta_1| &= 1, \\
f_c^2(0) &= f_c(f_c(0)) = (\delta_1 c)^2 + c = (\delta_1^2 c + 1)c \\
|\delta_2| &= |\delta_1^2 c + 1| \geq |\delta_1^2||c| - 1 > 2|\delta_1^2| - 1 = 1, \\
f_c^3(0) &= f_c(f_c^2(0)) = (\delta_2 c)^2 + c = c(\delta_2^2 c + 1) \\
|\delta_3| &= |\delta_2^2 c + 1| \geq |\delta_2^2||c| - 1 > 2|\delta_2^2| - 1 > \delta_2^2, \\
&\vdots \\
f_c^n(0) &= f_c(f_c^{n-1}(0)) = (\delta_{n-1} c)^2 + c = c(\delta_{n-1}^2 c + 1) \\
|\delta_n| &= |\delta_{n-1}^2 c + 1| \geq |\delta_{n-1}^2||c| - 1 > 2|\delta_{n-1}^2| - 1 > (\delta_{n-1})^2 > \delta_2^{2^{n-2}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n||c| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_2|^{2^{n-2}}|c| = \infty \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) = \infty.$$

問題 3.1.1  $|c| \leq 2$  のとき, ある番号  $N$  で  $|f_c^N(0)| > 2$  となるときには

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) = \infty$$

が成り立つことを示せ.

マンデルブロー集合  $M$  とは

つぎの集合のことである:

$$M = \left\{ c \in \mathbf{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) \neq \infty \right\}.$$

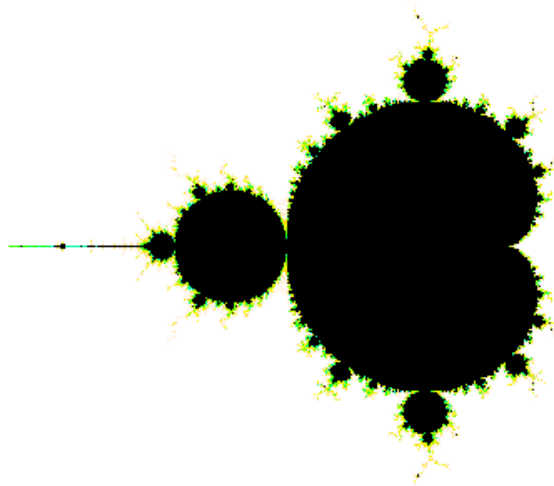
マンデルブロー集合  $M$  は, 右図

の中で黒く塗られて表されている.

上に述べたことおよび問題 3.1.1 から,

$$M = \left\{ c \in \mathbf{C} \mid |f_c^n(0)| \leq 2, n = 1, 2, \dots \right\}$$

となっていることがわかる.





マンデルブロー集合  $M$  は複雑な形をしていて、カーディオイドで囲まれた領域や開円板を含んでいる。

命題 3.1.2

- (1)  $\left\{ w - w^2 \in \mathbf{C} \mid |w| < \frac{1}{2} \right\} \subset M$  ,  
 (2)  $\left\{ -1 - w - w^2 \in \mathbf{C} \mid |w + w^2| < \frac{1}{4} \right\} \subset M$  .

関数  $z = \varphi(w) = w - w^2$  による 中心 0 半径  $\frac{1}{2}$  の円

$$\gamma = \left\{ w \in \mathbf{C} \mid |w| = \frac{1}{2} \right\}$$

の像を考えよう。  $w = u + iv \in \mathbf{C}$  に対して、  $z = w - w^2 = \frac{1}{4} - \frac{(1 - 2w)^2}{4}$  であるから、関数  $\varphi(w)$  は三個の関数

$$\begin{cases} \omega = f(w) = 1 - 2w \\ \zeta = g(\omega) = \omega^2 \\ z = h(\zeta) = \frac{1}{4} - \frac{\zeta}{4} \end{cases}$$

の合成関数  $\varphi = h \cdot g \cdot f$  と考えることができる。

関数  $\omega = f(w)$  は  $w$  平面の中心 0 半径  $\frac{1}{2}$  の円  $\gamma$  を  $\omega$  平面の中心 1 半径 1 の円  $\Gamma$  に写す。

1.6 複素数と曲線 二次関数とカーディオイド 見たように、関数  $\zeta = g(\omega)$  は  $\omega$  平面の中心 1 半径 1 の円  $\Gamma$  を  $\zeta$  平面の極方程式  $\rho = 2(1 + \cos \theta)$  で与えられる曲線 カーディオイド  $C$  に写す。

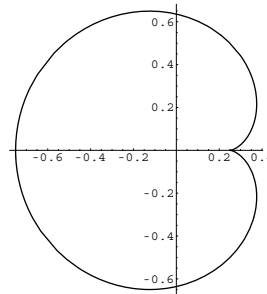
関数  $z = h(\zeta)$  はこのカーディオイド  $C$  を  $\frac{1}{4}$  に縮小し原点对称に写した後  $\frac{1}{4}$  右に平行移動して  $z$  平面のカーディオイドに写す。すなわち、関数  $\varphi$  は  $w$  平面の中心 0 半径  $\frac{1}{2}$  の円  $\gamma$  を  $z$  平面のカーディオイドに写す。

このカーディオイドは  $z$  平面で

極方程式  $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$  で与えられる

カーディオイドを  $y$  軸に関して折り返した後

$+\frac{1}{4}$  だけ右に平行移動したものである。



問題 3.1.3 上で述べたカーディオイドのパラメータ表示を求めよ。

命題 3.1.2 (1) の証明 任意の  $c = w - w^2$  ( $|w| < \frac{1}{2}$ ) に対して,

$$A = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) = w \right\}$$

を考える.  $f_c(w) = w$  であるから,  $w \in A$  である.

$w$  は関数  $f_c(z)$  の不動点であるが,  $w$  は関数  $f_c(z)$  の不動点であるだけでなく, 吸引不動点と呼ばれる性質

$$0 < \exists \rho < 1, \exists \delta > 0 : |z - w| < \delta \implies |f_c(z) - w| \leq \rho |z - w|$$

を持っている. このことはつぎのようにしてわかる:

$$0 < \rho = \frac{1}{2} + |w| < 1, \quad \delta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - |w| \right) = \frac{1}{4} - \frac{|w|}{2} > 0 \text{ とおく. この場合, } f_c(w) = w \text{ である}$$

から  $|z - w| < \delta$  のとき

$$\begin{aligned} |f_c(z) - w| &= |z^2 + c - (w^2 + c)| = |z^2 - w^2| = |z + w| |z - w| \\ &\leq (|z| + |w|) |z - w| \leq (|w| + \delta + |w|) |z - w| = \left( |w| + \frac{1}{4} - \frac{|w|}{2} + |w| \right) |z - w| \\ &= \left( \frac{|w|}{2} + \frac{1}{4} + |w| \right) |z - w| \leq \left( \frac{1}{2} + |w| \right) |z - w| = \rho |z - w|. \end{aligned}$$

$0 < \rho < 1$  であるから,

$$|f_c^n(z) - w| \leq \rho^n |z - w| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

したがって,  $|z - w| < \delta$  のとき  $z \in A$  である. こうして

$$f_c(\Delta(w, \delta)) \subset \Delta(w, \delta) \subset A$$

が成り立っていることが示された, ただし  $\Delta(w, \delta) = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z - w| < \delta \right\}$ .

さて,

$$z \in A \text{ ならば, } \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) = w \text{ より ある番号 } n \text{ で } f_c^n(z) \in \Delta(w, \delta)$$

が成り立つから

$$A \subset \bigcup_{n=0,1,2,\dots} f_c^{-n}(\Delta(w, \delta)), \text{ ただし } f_c^{-n}(\Delta(w, \delta)) = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid f_c^n(z) \in \Delta(w, \delta) \right\}.$$

また,

$$z \in f_c^{-n}(\Delta(w, \delta)) \text{ ならば, } f_c^n(z) \in \Delta(w, \delta) \text{ より } f_c^{n+1}(z) \in A$$

となるので

$$f_c^{-n}(\Delta(w, \delta)) \subset A \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ. こうしてつぎの事が示された:

$$A = \bigcup_{n=0,1,2,\dots} f_c^{-n}(\Delta(w, \delta)) \text{ が成り立ち, } A \text{ は } (\mathbf{C} \text{ の}) \text{ 開集合である.}$$

$A = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) = w \right\}$  に対して  $f_c(A) \subset A$  と  $f_c^{-1}(A) \subset A$  は明らかであるから,

$$f_c(A) \subset A = f_c^{-1}(A)$$

が成り立つ. 実は, 任意の  $z \in A$  に対して

$$f_c^{-1}(z) = \sqrt{z-c} \neq \emptyset \text{ 空集合}$$

であるから, 関数  $f_c(z)$  の下での完全不変性

$$f_c(A) = A = f_c^{-1}(A)$$

が成り立つ. 先に述べた (問題 3.1.1) ように  $A \subset \overline{\Delta}(0, 2) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 2\}$  となってい

る.  $c = w - w^2$  が  $A$  に含まれるか否かを調べてみよう. 今,  $c \notin A$  と仮定する.

このとき, ( $\mathbf{C}$  の開集合)  $A$  に含まれる半径  $r > 0$  中心  $w$  の閉円板  $\overline{\Delta}(w, r)$  をとると,

$$f_c^n : A \rightarrow A$$

の逆関数の分枝

$$\begin{cases} g_n = (f_c^n)^{-1} : \overline{\Delta}(w, r) \rightarrow A \subset \Delta(0, 2) \\ g_n(w) = w \end{cases}$$

が正則関数として取れる (厳密には,  $f_c : A \rightarrow A$  が  $A$  の被覆になっていることからわかる.)

このとき  $g_n$  の  $w$  での微分係数はコーシーの評価式により

$$|\{g_n\}'(w)| \leq \frac{2}{r} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たす. 一方

$$f_c^n(g_n(z)) = z \quad (z \in \Delta(w, r))$$

であるから, 合成関数の微分法 (定理 2.2.3 (5)) を使って

$$\{f_c^n\}'(w)\{g_n\}'(w) = 1 \quad \text{すなわち} \quad \{g_n\}'(w) = \frac{1}{\{f_c^n\}'(w)}$$

が成り立つ.

$$|\{f_c\}'(w)| = 2|w| < 1$$

より

$$\begin{aligned} |\{f_c^n\}'(w)| &= |\{f_c^{n-1}(w)\}'\{f_c\}'(w)| \\ &\vdots \\ &= |\{f_c\}'(w)|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから,

$$|\{g_n\}'(w)| \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

これは矛盾である. こうして  $c \in A$  が示された.  $f_c(0) = c$  であることから,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(c) \neq \infty$  が成り立ち  $c \in M$  がわかる．こうして

$$\left\{ w - w^2 \in \mathbf{C} \mid |w| < \frac{1}{2} \right\} \subset M \quad \text{が示された.}$$

命題 3.1.2 (2) の証明 任意の  $c = -1 - w - w^2$  ( $|w + w^2| < \frac{1}{4}$ ) に対して,

$$A = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{2n}(z) = w \right\}$$

を考える． $f_c^2(w) = w$  ( $\because f_c(w) = w^2 + c = -1 - w$ ) であるから,  $w \in A$  である．

$w$  は関数  $f_c(z)$  の周期 2 の周期点であるが,  $w$  は関数  $f_c(z)$  の吸引周期点と呼ばれる性質

$$0 < \exists \rho < 1, \exists \delta > 0 : |z - w| < \delta \implies |f_c^2(z) - w| \leq \rho |z - w|$$

を持っている．このことはつぎのようにしてわかる：最初に,  $\frac{d}{dz} f_c^2(z) = 4(z^2 + c)z$  であるから,

$\lambda = \{f_c^2\}'(w) = 4(w^2 + c)w = 4(1 + w)w$  に対し  $|\lambda| = 4|(1 + w)w| < 1$  に注意する．導関数

$\{f_c^2\}'(z) = 4(z^2 + c)z$  の連続性により,

$$\exists \delta > 0 : |z - w| < \delta \implies |\{f_c^2\}'(z)| \leq \rho = \frac{\lambda + 1}{2} < 1$$

が成り立つ．このとき,  $|z - w| < \delta$  ならば  $w$  から  $z$  までを結ぶ線分  $C_z$  を取ると

(複素積分の計算法から)

$$\begin{aligned} |f_c^2(z) - w| &= |f_c^2(z) - f_c^2(w)| = \left| \int_{C_z} \{f_c^2\}'(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \max_{\zeta \in C_z} |\{f_c^2\}'(\zeta)| \times (C_z \text{ の長さ}) = \rho |z - w| \end{aligned}$$

が成り立っている． $0 < \rho < 1$  であるから,

$$|f_c^{2n}(z) - w| \leq \rho^n |z - w| \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty).$$

したがって,  $|z - w| < \delta$  のとき  $z \in A$  である．こうして

$$f_c^2(\Delta(w, \delta)) \subset \Delta(w, \delta) \subset A$$

が成り立っていることが示された, ただし  $\Delta(w, \delta) = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z - w| < \delta \right\}$  .

問題 3.1.4 命題 3.1.2 (1) の場合の証明と同様に考えて, 証明を完成させよ .

# 付録A 収束について

## 数列の収束と $\epsilon - N$ 論法

複素数列の収束の「直観的説明」は、複素数の平面上で順番に書いていく点がだんだん一点に近づいていくといったものであろう。この「だんだん一点に近づいていく」ということを数量的に言い表すと、数列の各項と近づいていく一点との距離の変動を言い表すことになる。それがいわゆる  $\epsilon - N$  論法である。 $\epsilon - N$  論法は、数列の各項と極限值の関係を数量的に評価することを通して数列の収束を表現している。

**収束性** 複素数列  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  が複素数  $\alpha$  に収束するとは、

$$(*) \quad \left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して, ある正の番号 } N \text{ が存在して,} \\ \text{どの番号 } n \text{ に対しても} \\ n \geq N \implies |\alpha_n - \alpha| < \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである。

この表現が与える収束の印象は

‘複素数列の点がすべて打ってあるところから複素数列の点を順番に消していくと、点の散らばっている範囲が狭まって一点に集まっていく。’

というものである。

**説明** 性質 (\*) の否定を考えると、

複素数列  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  が  $\alpha$  に収束しないとは、

$$\left( \begin{array}{l} \text{ある正の数 } \epsilon \text{ に対して, どんな正の番号 } N \text{ を選んでも,} \\ \text{ある番号 } n \text{ に対して} \\ n \geq N \text{ かつ } |\alpha_n - \alpha| \geq \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである。

上の議論から、

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha| = 0 .}$$

**複素数列の実部および虚部**

複素数列  $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$  に対して，複素数の実部と虚部を考えて実数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  および  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  を考えることができる．このとき，任意の複素数  $z_0 = x_0 + iy_0$  に対して，

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \leq 2 \max\{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\}$$

が成り立つから，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0 \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n - y_0| = 0 . \end{cases}$$

**命題** 複素数列  $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n=1}^{\infty}$  が収束することは，実数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  および  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  が

収束することと同値である．収束するとき，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

が成り立つ．

さて，複素数列の収束の概念は，複素数列の極限値の存在によって定義されるのであるが，複素数列の収束をその極限値を知ることなく判断できることが知られている．

**定理 コーシーの判定条件** 複素数列  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  が収束するための必要十分条件は，

$$(C) \quad \left( \begin{array}{l} \text{任意の正の数 } \epsilon \text{ に対して，ある正の番号 } N \text{ が存在して，} \\ \text{どの番号 } m, n \geq N \text{ に対しても } |z_n - z_m| < \epsilon \end{array} \right.$$

が成り立つことである．

注． コーシーの判定条件 (C) は，

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} |z_n - z_m| = 0$$

と書かれる，また 判定条件 (C) を満たす数列は コーシー列と呼ばれる．

**問題 A.0.5** 収束する数列  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  は コーシーの判定条件 (C) を満たすことを示せ．

## 付録B 偏微分について

### 偏微分係数

二変数関数  $z = f(x, y)$  の定義域内の点  $(a, b) (\in \mathbf{R}^2)$  を考える.

#### 定義

- (1) 極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$  が存在するとき,  
関数  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で  $x$  に関して偏微分可能といわれ, 極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

を  $(a, b)$  での  $x$  に関する偏微分係数といい  $f_x(a, b)$  と表す.

- (2) 極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$  が存在するとき,  
関数  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で  $y$  に関して偏微分可能といわれ, 極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}$$

を  $(a, b)$  での  $y$  に関する偏微分係数といい  $f_y(a, b)$  と表す.

### 偏微分係数の幾何学的意味

二変数関数  $z = f(x, y)$  のグラフとして定義される曲面を  $S$  とする.  $S$  上の点  $P(a, b, f(a, b))$  を考える. また,  $\mathbf{R}^3$  内の平面  $\pi_a : x = a$  と  $\pi_b : y = b$  を考える.

曲面  $S$  と平面  $\pi_b$  との交わり, すなわち曲面  $S$  の平面  $\pi_b$  による切片, は  $\mathbf{R}^3$  内の曲線

$$\begin{cases} x = t \\ y = b \\ z = f(t, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と考えられると同時に平面  $\pi_b : y = b$  内の曲線

$$C_b : \begin{cases} x = t \\ z = f(t, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

とも考えられる.

この平面  $\pi_b$  内の曲線  $C_b$  の点  $P(a, b, f(a, b)) \in \pi_b$  での接線の傾きを求めよう。  
 二変数関数  $f(x, y)$  の変数  $y$  を  $y = b$  と固定して, 関数  $f(x, b)$  を変数  $x$  の一変数関数と考える;  
 $\varphi(x) = f(x, b)$  と名前をつける。

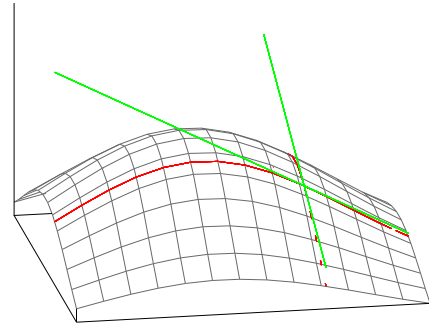
この曲線  $C_b$  上の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線の傾きは, 関数  $z = \varphi(x) (= f(x, b))$  の  $x = a$  での接線の傾き  $\varphi'(a)$  である。

この傾きが  $(a, b)$  での  $f(x, y)$  の  $x$  に関する偏微分係数である。すなわち

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \varphi'(a) . \quad z=f(x, y)$$

そして, 曲線  $C_b$  の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線は,  $\mathbf{R}^3$  内で,

$$\begin{cases} x = t \\ y = b \\ z = f_x(a, b)(t - a) + f(a, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$



と表される。同様に,

曲面  $S$  と平面  $\pi_a$  との交わり, すなわち 曲面  $S$  の平面  $\pi_a$  による切片, は  $\mathbf{R}^3$  内の曲線

$$\begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = f(a, t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と考えられると同時に平面  $\pi_a : x = a$  内の曲線

$$C_a : \begin{cases} y = t \\ z = f(a, t) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

とも考えられる。

この平面  $\pi_a$  内の曲線  $C_a$  の点  $P(a, b, f(a, b)) \in \pi_a$  での接線の傾きを求めよう。  
 二変数関数  $f(x, y)$  の変数  $x$  を  $x = a$  と固定して, 関数  $f(a, y)$  を変数  $y$  の一変数関数と考える;  
 $\psi(y) = f(a, y)$  と名前をつける。

この曲線  $C_a$  上の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線の傾きは, 関数  $z = \psi(y) (= f(a, y))$  の  $y = b$  での接線の傾き  $\psi'(b)$  である。

この傾きが  $(a, b)$  での  $f(x, y)$  の  $y$  に関する偏微分係数である。すなわち

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} = \psi'(b)$$

そして, 曲線  $C_a$  の点  $P(a, b, f(a, b))$  での接線は,  $\mathbf{R}^3$  内で,

$$\begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = f_y(a, b)(t - b) + f(a, b) \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

と表される。



**定義**

- (1) 二変数関数  $f(x, y)$  が領域  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  で定義されていて, 領域  $D$  の各点  $(a, b)$  で  $x$  に関する偏微分係数  $f_x(a, b)$  が存在するとき, 偏導関数  $f_x(x, y)$  が領域  $D$  で定義される.  
 $f_x(x, y)$  を  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$  とも表す.
- (2) 二変数関数  $f(x, y)$  が領域  $D (\subset \mathbb{R}^2)$  で定義されていて, 領域  $D$  の各点  $(a, b)$  で  $y$  に関する偏微分係数  $f_y(a, b)$  が存在するとき, 偏導関数  $f_y(x, y)$  が領域  $D$  で定義される.  
 $f_y(x, y)$  を  $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$  とも表す.

**例**

関数  $f(x, y) = x^2y^3 + x + 5y$ ,  $g(x, y) = e^{xy} + \sin(x + 2y)$  に対して,  
 $f_x(x, y) = 2xy^3 + 1$ ,  $f_y(x, y) = 3x^2y^2 + 5$ .  
 $g_x(x, y) = ye^{xy} + \cos(x + 2y)$ ,  $g_y(x, y) = xe^{xy} + 2\cos(x + y)$ .

**高階 (次) 偏導関数**

関数  $f(x, y)$  に対して, つぎの高階偏導関数が存在するときがある:

$f_x(x, y)$  の  $x$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{xx}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$  と表す.  
 $f_x(x, y)$  の  $y$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{xy}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y)$  と表す.  
 $f_y(x, y)$  の  $x$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{yx}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)$  と表す.  
 $f_y(x, y)$  の  $y$  に関する (二階) 偏導関数を  $f_{yy}(x, y)$  または  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$  と表す.  
 ...

問題 B.0.6 つぎの関数の 1 階偏導関数を求めよ.

- (1)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $g(x, y) = 3x^2y - y^3$ .  
 (2)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $g(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ .  
 (3)  $f(x, y) = \log \sqrt{(x^2 + y^2)}$ ,  $g(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  ( $x > 0$ ).

**定理**

関数  $f(x, y)$  は  $C^1$  級 (偏導関数が連続) で  $x(t), y(t)$  が微分可能のとき,

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

が成り立つ (合成関数  $f(x(t), y(t))$  の微分法則) .



# 問題 略解

問題 1.1.1 略解. (1)  $(1+i)^{100} = (2i)^{50} = -2^{25}$  (2)  $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{99} = (-i)^{33} = -i$ .

$$(3) \quad \frac{2+9i}{1+2i} = \frac{(2+9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-(-18)+9i-4i}{1-(-4)} = \frac{20+5i}{5} = 4+i.$$

問題 1.1.2 略解. (1) 直接  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2$  を計算して  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^2 = \frac{i}{1-\sqrt{3}i}$ .

$$\therefore \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^4 = \left(\frac{i}{1-\sqrt{3}i}\right)^2 = \frac{1}{2(1+\sqrt{3}i)}, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^6 = \frac{1}{2(1+\sqrt{3}i)} \cdot \frac{i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{i}{8}.$$

別解として  $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$  と表せることから,

$$(1+i)^6 = 2^3\left(\cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4}\right) = -2^3i, \quad (\sqrt{3}-i)^6 = 2^6\left(\cos\frac{-6\pi}{6} + i\sin\frac{-6\pi}{6}\right) = -2^6i, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^6 = \frac{i}{8}.$$

$$(2) \quad \frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i} = \frac{(2+\sqrt{3}-i)^2}{(2+\sqrt{3})^2+1} = \frac{6+4\sqrt{3}-(4+2\sqrt{3})i}{8+4\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})i}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

$$(3) \quad \left(\frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^3 = \frac{(2-2\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{8} = -i.$$

$$(4) \quad \left(\frac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^{2007} = (-i)^{669} = (-i)^{4 \times 167 + 1} = -i.$$

問題 1.1.3 略解. (1) ド・モワブルの定理から,

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta \\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i\sin\theta + 3\cos\theta \cdot (i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\} \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) + i\{3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\} \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i\{3\sin\theta - 4\sin^3\theta\}. \end{aligned}$$

実部と虚部を比較して,  $\begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{cases}$  を得る. //

(2) ド・モワブルの定理から,

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos 5\theta + i\sin 5\theta \\ &= \cos^5\theta + 5\cos^4\theta \cdot i\sin\theta + 10\cos^3\theta \cdot (i\sin\theta)^2 + 10\cos^2\theta \cdot (i\sin\theta)^3 + 5\cos\theta \cdot (i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\{5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta\} \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 + i\{5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta + \sin^5\theta\} \\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta + i\{16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta\}. \end{aligned}$$

実部と虚部を比較して,  $\begin{cases} \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \\ \sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta \end{cases}$  を得る. //

問題 1.1.4 略解. (1) ド・モワブルの定理  $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) から,

$$\frac{1}{z} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta, \quad \frac{1}{z^n} = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) = \cos n\theta - i \sin n\theta \quad (n \in \mathbf{N}).$$

従って  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) .

(2)

$$\begin{aligned} \left(z + \frac{1}{z}\right)^5 &= z^5 + 5z^4\left(\frac{1}{z}\right) + 10z^3\left(\frac{1}{z}\right)^2 + 10z^2\left(\frac{1}{z}\right)^3 + 5z\left(\frac{1}{z}\right)^4 + \left(\frac{1}{z}\right)^5 \\ &= z^5 + 5z^3 + 10z + 10\left(\frac{1}{z}\right) + 5\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^5 = z^5 + \frac{1}{z^5} + 5\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z + \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

(3) (2) と (1) より,

$$2^5 \cos^5 \theta = 2 \cos 5\theta + 10 \cos 3\theta + 20 \cos \theta. \quad \therefore \cos^5 \theta = \frac{1}{16} (\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta).$$

(4) (3) より,

$$\begin{aligned} \sin^5 \theta &= \cos^5\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16} \left\{ \cos 5\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 5 \cos 3\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 10 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{16} (\sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta). \quad // \end{aligned}$$

問題 1.2.3 略解. 複素数  $z, w$  を

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad w = |w|e^{i\varphi} \quad (\exists \theta, \varphi \in \mathbf{R})$$

と置く. このとき

$$z\bar{w} = |z|e^{i\theta} \cdot |w|e^{-i\varphi} = |z||w|e^{i(\theta-\varphi)} = |z||w|\{\cos(\theta-\varphi) + i \sin(\theta-\varphi)\}$$

が成り立つから,

$$|\operatorname{Im}\{z\bar{w}\}| = |z||w| |\sin(\theta-\varphi)|$$

は複素数  $0, z, w, z+w$  を頂点とする平行四辺形の面積であることがわかる. //

問題 1.2.4 略解. すべての実数  $t$  に対して

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + t\beta_i)(\bar{\alpha}_i t + \bar{\beta}_i) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i\right) t^2 + \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i \bar{\beta}_i + \bar{\alpha}_i \beta_i)\right) t + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{\beta}_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i\right) t^2 + 2 \left(\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{\beta}_i\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから実数係数二次式の判別式

$$\left(\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{\beta}_i\right) \leq 0.$$

今,  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \right| e^{i\phi} \quad (\exists \phi \in \mathbf{R})$  と表そう.

複素数  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) に代えて複素数  $\gamma_i = e^{-i\phi} \alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を考えると

$$\left( \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{\beta}_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{\gamma}_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{\beta}_i \right) \leq 0.$$

ここで

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{\beta}_i &= \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n e^{-i\phi} \alpha_i \bar{\beta}_i = \operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \right) e^{-i\phi} = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \right| \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i \bar{\gamma}_i &= \sum_{i=1}^n e^{-i\phi} \alpha_i e^{i\phi} \bar{\alpha}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i \end{aligned}$$

が成り立つから求める不等式

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \right|^2 - \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{\beta}_i \right) \leq 0.$$

が成り立つ. 等号が成り立つのは, ある  $\lambda \in \mathbf{R}$  に対して  $\alpha_i = \lambda \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が成り立つ場合にかぎる. //

問題 1.3.2 略解. (2)  $p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$

問題 1.3.3 略解. (1)  $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  (2)  $\pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$  (3)  $\pm \frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

問題 1.3.4 略解.  $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = \alpha \left( z + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = 0$  から, その解は

$$z = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

で与えられることがわかる. ただし, 複素数の平方根記号は二つの複素数を示している.

問題 1.3.5 略解.

(1) 実数  $a, b$  を係数とする二次方程式  $z^2 + az + b = 0$  の二つの解を  $\alpha, \beta$  とする. このとき解と係数の関係から,

$$a = -(\alpha + \beta), \quad b = \alpha\beta$$

が成り立つ. 実数係数の二次方程式の解  $\alpha, \beta$  はともに実数であるかまたは 複素数解  $\alpha$  とその共役複素数である解  $\beta = \bar{\alpha}$  が成り立つ.

$\alpha, \beta$  がともに実数である場合:  $\alpha < 0, \beta < 0$  より

$$a = -(\alpha + \beta) > 0, \quad b = \alpha\beta > 0$$

が成り立つ，この場合は逆も成り立つ．

$\beta = \bar{\alpha}$  である場合：  $\alpha, \beta$  の実部  $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta$  が負であることにより

$$a = -(\alpha + \beta) = -(\alpha + \bar{\alpha}) = -2\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad b = \alpha \bar{\alpha} > 0$$

が成り立つ，また逆も成り立つ． //

(2) 実数  $a, b, c$  を係数とする三次方程式  $z^3 + az^2 + bz + c = 0$  の三つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とする．このとき 解と係数の関係から，

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma), \quad b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \quad c = -\alpha\beta\gamma$$

が成り立っている．さらに

$$\begin{aligned} ab - c &= -(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma \\ &= -(\alpha^2\beta + \alpha\beta\gamma + \gamma\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha) + \alpha\beta\gamma \\ &= -\alpha^2(\beta + \gamma) - \beta^2(\gamma + \alpha) - \gamma^2(\alpha + \beta) - 2\alpha\beta\gamma \\ &= -\alpha^2(\beta + \gamma) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \alpha(\beta + \gamma)^2 \end{aligned}$$

が成り立っている．実数を係数とする三次方程式は必ず実数解を持つので  $\alpha \in \mathbf{R}$  とすると，この三次方程式の解  $\alpha, \beta, \gamma$  はともに実数であるかまたは，複素数解  $\beta$  とその共役複素数である解  $\gamma = \bar{\beta}$  が成り立つ．

すべての解の実部が負であると仮定しよう．

$\alpha, \beta, \gamma$  がすべて実数であるとき， $\alpha < 0, \beta < 0, \gamma < 0$  より

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma) > 0, \quad ab - c = -\alpha^2(\beta + \gamma) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \alpha(\beta + \gamma)^2 > 0, \quad c = -\alpha\beta\gamma > 0$$

が成り立つ．

$\alpha \in \mathbf{R}$  かつ  $\gamma = \bar{\beta}$  が成り立つときには， $\alpha < 0, \beta + \gamma = \beta + \bar{\beta} = 2\operatorname{Re} \beta < 0$  から

$$a = -(\alpha + \beta + \gamma) > 0, \quad ab - c = -\alpha^2(\beta + \gamma) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \alpha(\beta + \gamma)^2 > 0, \quad c = -\alpha\beta\gamma = -\alpha\beta\bar{\beta} > 0$$

が成り立つことがわかる．

逆を示すために， $a > 0$  かつ  $ab > c > 0$  が成り立っていると仮定する．このとき  $b > 0$  である．

三つの解  $\alpha, \beta, \gamma$  がともに実数である場合には  $c = -\alpha\beta\gamma > 0$  が成り立ち，また 1 つの実数解  $\alpha$  と共役複素数の解  $\beta, \gamma = \bar{\beta}$  を持つ場合には  $c = -\alpha\beta\bar{\beta} > 0$  が成り立つことから， $\alpha < 0$  と考えてもよい．さらに

$$\begin{aligned} ab - c &= -\alpha^2(\beta + \gamma) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \alpha(\beta + \gamma)^2 \\ &= (\beta + \gamma)\{-\alpha(\beta + \gamma) - \alpha^2 - \beta\gamma\} = (\beta + \gamma)\{-\alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha^2\} \\ &= (\beta + \gamma)(-b - \alpha^2) > 0 \end{aligned}$$

が成り立っているから  $\beta + \gamma < 0$  でなければならない.  $\alpha, \beta, \gamma$  がともに実数である場合には  $c = -\alpha\beta\gamma > 0$  より  $\beta\gamma > 0$  であるから,  $\beta < 0$  かつ  $\gamma < 0$  でなければならない.

$\gamma = \bar{\beta}$  である場合には,  $\beta + \gamma = \beta + \bar{\beta} = 2\operatorname{Re} \beta < 0$  から  $\operatorname{Re} \beta = \operatorname{Re} \gamma < 0$  であることがわかる. こうして三つの解の実部が負であることが示された. //

**問題 1.3.6 略解.** (1) 明らかに, すべての  $n = 1, 2, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} & (1-z)(1+z+z^2+\dots+z^k+\dots+z^{n-1}) \\ &= 1+z+z^2+\dots+z^k+\dots+z^{n-1} - z(1+z+z^2+\dots+z^k+\dots+z^{n-1}) \\ &= 1+z+z^2+\dots+z^k+\dots+z^{n-1} - (z+z^2+\dots+z^k+\dots+z^{n-1}+z^n) \\ &= 1-z^n \end{aligned}$$

が成り立つ.

(2) 数学的帰納法で

$$1 - (n+1)z^n + nz^{n+1} = (1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+kz^{k-1}+\dots+nz^{n-1})$$

を示す.  $n=1$  の場合

$$1 - (1+1)z + z^{1+1} = 1 + 2z + z^2 = (1-z)^2$$

が成り立つことは明らかである.

$n=k$  の場合に

$$1 - (k+1)z^k + kz^{k+1} = (1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+kz^{k-1})$$

が成り立つと仮定すると,  $n=k+1$  の場合に

$$\begin{aligned} (1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+(k+1)z^k) &= (1-z)^2(1+2z+3z^2+\dots+kz^{k-1}) + (1-z)^2(k+1)z^k \\ &= 1 - (k+1)z^k + kz^{k+1} + (1-2z+z^2)(k+1)z^k \\ &= 1 - (k+1)z^k + kz^{k+1} + (k+1)z^k - 2(k+1)z^{k+1} + (k+1)z^{k+2} \\ &= 1 - (k+2)z^{k+1} + (k+1)z^{k+2} \end{aligned}$$

が成り立つ.

数学的帰納法の原理により, すべての正の整数  $n$  に対して主張が成り立つ. //

**問題 1.3.7 略解.**

$$f(z) = a \frac{z-z_1}{z_0-z_1} \frac{z-z_2}{z_0-z_2} + b \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \frac{z-z_2}{z_1-z_2} + c \frac{z-z_0}{z_2-z_0} \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

**問題 1.3.8 略解.**  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n > 0$  のとき, 代数方程式

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$



が絶対値が 1 より小さい解  $z = z_0$  を持つと仮定する．このとき，関係式

$$(1 - z_0)(a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0) = 0 \quad (|z_0| < 1)$$

が成り立つから，

$$a_0 = (a_0 - a_1)z_0 + (a_1 - a_2)z_0^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)z_0^n + a_n z_0^{n+1}$$

が成り立つ．故に

$$\begin{aligned} a_0 &= |(a_0 - a_1)z_0 + (a_1 - a_2)z_0^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)z_0^n + a_n z_0^{n+1}| \\ &\leq (a_0 - a_1)|z_0| + (a_1 - a_2)|z_0|^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|z_0|^n + a_n|z_0|^{n+1} \\ &< (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + a_n = a_0 \end{aligned}$$

が成り立つ．これは不合理である． //

問題 1.3.9 略解.  $1 + \frac{1}{1-i} + \frac{1}{(1-i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1-i)^{17}} = \frac{1 - \frac{1}{(1-i)^{18}}}{1 - \frac{1}{1-i}}$  であるから，

$(1-i)^2 = 1 + i^2 - 2i = -2i$ ,  $i^4 = 1$  に注意すると，

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{1-i} + \frac{1}{(1-i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1-i)^{17}} &= \frac{1 - \frac{1}{(1-i)^{18}}}{1 - \frac{1}{1-i}} = (1-i) \frac{1 - \frac{1}{(-2i)^9}}{1-i-1} = (i+1) \left(1 - \frac{1}{-2^9 i}\right) \\ &= (i+1) \left(1 - \frac{i}{2^9}\right) = 1 + \frac{1}{2^9} + i \left(1 - \frac{1}{2^9}\right) = \frac{513}{512} + \frac{511}{512}i. \end{aligned}$$

問題 1.4.1 略解. (1)  $i = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$  であるから，方程式  $z^3 = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

の解を求めればよい．その解  $z$  は

$$\begin{aligned} z &= \left[ \cos \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right] \quad (k = 0, 1, 2) \\ &= \left[ \cos \frac{\pi + 4k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{6} \right] \quad (k = 0, 1, 2) \\ &= \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right], \left[ \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right], \left[ \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} \right] \\ &= \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, -i. \quad // \end{aligned}$$

(2)  $-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$  であるから，方程式  $z^3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$  の解を

求めればよい．その解  $z$  は

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{2} \left[ \cos \frac{1}{3} \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin \frac{1}{3} \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \right] \quad (k = 0, 1, 2) \\ &= \sqrt[3]{2} \left[ \cos \frac{3\pi + 8k\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi + 8k\pi}{12} \right] \quad (k = 0, 1, 2) \\ &= \sqrt[3]{2} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right], \sqrt[3]{2} \left[ \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right], \sqrt[3]{2} \left[ \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right] \\ &= \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \left[ -\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} - 1) \right], \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \left[ \sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1) \right], \quad \text{但し} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{11\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} = \sin \frac{19\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \frac{11\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \cos \frac{19\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{は半角公式から計算した.} \quad //$$

(3)  $|-1 + \sqrt{3}i| = 2$  であるから,  $-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right)$ .

方程式  $z^4 = 16\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right)$  の解を求めればよい. その解  $z$  は

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{16} \left[ \cos \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ &= 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ &= 2 \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right], 2 \left[ \cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} \right], 2 \left[ \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right], 2 \left[ \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right] \\ &= 1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} + i, -1 - \sqrt{3}i, \sqrt{3} - i. \quad // \end{aligned}$$

**問題 1.5.1 略解.** (1) 線分 AB を  $t:1-t$  ( $0 < t < 1$ ) に内分する点 P は, 明らかに, 複素数  $\alpha + t(\beta - \alpha) = (1-t)\alpha + t\beta$  に対応していると考えられるので,  $P = P((1-t)\alpha + t\beta)$  である.

(2) 複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  を頂点  $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$  とする三角形の重心は  $P\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$  である.

HINT. 三角形 ABC の重心は辺 AB の中点 M と頂点 C を結ぶ線分 CM を 1:2 に内分する点であることを使う.

**問題 1.5.2 略解.**  $|z+1| = 2|z-2|$  であるから,

$$|z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = 4|z-2|^2 = 4(z-2)(\bar{z}-2).$$

展開して,  $\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4\{z\bar{z} - 8z - 8\bar{z} + 4\}$ .

$$\therefore 3z\bar{z} - 9z - 9\bar{z} + 15 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (z-3)(\bar{z}-3) = 4$$

$$\therefore |z-3| = 2 \quad \text{これは円 (いわゆる Apollonius の円) の方程式である.} \quad //$$

**問題 1.5.3 略解.** (1)  $f(z) = z + c\bar{z}$  に対して ( $\pm 1 \neq c \in \mathbf{R}$ ),

$$u + iv = f(z) = z + c\bar{z} = x + iy + c(x - iy) = (1+c)x + i(1-c)y$$

であるから

$$\begin{cases} u = (1+c)x \\ v = (1-c)y \end{cases}$$

が成り立つ. 故に

$$\gamma = \left\{ f(z) \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \right\} = \left\{ u + iv \in \mathbf{C} \mid \left( \frac{u}{1+c} \right)^2 + \left( \frac{v}{1-c} \right)^2 = 1 \right\}$$

は楕円である.

(2)  $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$  ( $z \in \mathbf{C}$ ) に対して,

$$\begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} = c e^{ia} \quad (\exists a \in \mathbf{R}) \\ c = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \neq 1 \end{cases}$$

が成り立つから,

$$\begin{aligned} f(z) &= \alpha z + \beta \bar{z} = \alpha \left( z + \frac{\beta}{\alpha} \bar{z} \right) = \alpha (z + c e^{ia} \bar{z}) \\ &= \alpha e^{i\frac{a}{2}} \left( z e^{-i\frac{a}{2}} + c z e^{-i\frac{a}{2}} \right) = \alpha e^{i\frac{a}{2}} (\omega + c \bar{\omega}) \quad , \quad \text{ただし } \omega = z e^{-i\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

が成り立つ. 明らかに

$$\gamma = \{ f(z) \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \} = \{ \alpha e^{i\frac{a}{2}} (\omega + c \bar{\omega}) \in \mathbf{C} \mid |\omega| = 1 \}$$

は楕円  $\{ \omega + c \bar{\omega} \in \mathbf{C} \mid |\omega| = 1 \}$  を 0 の回りの回転と相似拡大から得られる楕円である. //

問題 1.5.4 略解. 複素数の平面で 定点  $F = 0$ , 定直線  $l : \operatorname{Re} z = a$  ( $a \neq 0$ ) とする.

(1) 軌跡上の点を  $P : z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とする.

点  $P$  から 点  $F$  までの距離  $r$  と点  $P$  から直線  $l$  までの距離  $|a - r \cos \theta|$  の比 (離心率) が一定

$e (> 0)$  であるから

$$e = \pm \frac{r}{a - r \cos \theta} .$$

$$e = \frac{r}{a - r \cos \theta} > 0 \text{ の場合, } r \text{ を解いて } r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta} .$$

$$e = -\frac{r}{a - r \cos \theta} > 0 \text{ の場合, } r \text{ を解いて } r = \frac{-ea}{1 - e \cos \theta} = -\frac{ea}{1 + e \cos(\theta + \pi)} .$$

$$r' = \frac{ea}{1 + e \cos(\theta + \pi)} \text{ と置くと,}$$

$$P : z = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta = r' \cos(\theta + \pi) + i r' \sin(\theta + \pi) = r' e^{i(\theta + \pi)}$$

が成り立つので,  $r = \frac{ea}{1 + e \cos \theta}$  の正負にかかわらず  $P : z = r e^{i\theta}$  は曲線上の点である.

(2) 軌跡上の点を  $P : z = x + iy$  とする. このとき点  $P$  から 点  $F$  までの距離  $\sqrt{x^2 + y^2}$  と

点  $P$  から直線  $l$  までの距離  $|a - x|$  の比 (離心率) が一定  $e (> 0)$  であるから

$$e = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|a - x|} .$$

これから

$$e^2(a - x)^2 = x^2 + y^2 ,$$

そして

$$(1 - e^2)x^2 + 2e^2ax + y^2 = e^2a^2$$

が成り立つ. 明らかに  $e = 1$  の場合, 曲線は放物線である.

$e \neq 1$  の場合には

$$(1 - e^2) \left( x + \frac{e^2 a}{1 - e^2} \right)^2 - \frac{e^4 a^2}{1 - e^2} + y^2 = e^2 a^2$$

より

$$(1 - e^2) \left( x + \frac{e^2 a}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = e^2 a^2 + \frac{e^4 a^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 a^2}{1 - e^2}$$

が成り立つ。故に、曲線は  $\begin{cases} 0 < e < 1 \text{ のとき, 楕円} \\ e > 1 \text{ のとき, 双曲線.} \end{cases} //$

問題 1.6.1 略解.  $|\bar{\alpha}| = |\alpha| < 1$  であるから,  $1 + \bar{\alpha} \neq 0$  であることに注意する. そのとき

$$\begin{aligned} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} = 1 &\iff z - \alpha = 1 - \bar{\alpha}z \neq 0 \iff z(1 + \bar{\alpha}) = 1 + \alpha \\ &\iff z = \frac{1 + \alpha}{1 + \bar{\alpha}} \iff z\bar{z} = \frac{1 + \alpha}{1 + \bar{\alpha}} \cdot \frac{1 + \bar{\alpha}}{1 + \alpha} = 1 \end{aligned}$$

問題 1.6.2 Hint. 円弧  $C_1$  上の  $z$  が  $\beta$  に近く  $|z - \beta| < \frac{|\beta - \alpha|}{r}$  ( $r > 1$ ) を満たすとき,

$$|w| = \left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = \left| 1 + \frac{\beta - \alpha}{z - \beta} \right| \geq \frac{|\beta - \alpha|}{|z - \beta|} - 1 > r - 1$$

が成り立つ.  $r > 1$  はいくらでも大きくとることができるので, 円弧  $C_1$  の一次変換による像が有界ではあり得ない. 故に, 円弧  $C_1$  の一次変換による像は直線の一部であり,  $z = \alpha$  のとき  $w = 0$  であることから,  $0$  を始点とする半直線であることが導かれる. 同様に円弧  $C_2$  の像も  $0$  を始点とする半直線である. 一次変換  $w = \frac{z - \alpha}{z - \beta}$  ( $\alpha \neq \beta$ ) は  $\bar{C}$  から  $\bar{C}$  の上への一対一写像であることから, 領域  $D$  を角領域  $E$  へ写すことを導く.

問題 1.7.1 略解. (1)  $\log(-i) = \log|-i| + i \arg\{-i\} = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right\} i$  ( $n \in \mathbf{Z}$ )

(2)  $\log(1 + i) = \log\sqrt{2} + i \arg(1 + i) = \frac{\log 2}{2} + \left\{ \frac{\pi}{4} + 2n\pi \right\} i$  ( $n \in \mathbf{Z}$ )

(3)  $\log(\sqrt{3} - i) = \log|\sqrt{3} - i| + i \arg(\sqrt{3} - i) = \log 2 + \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right\} i$  ( $n \in \mathbf{Z}$ )

問題 1.8.1 略解.  $\alpha = a + ib$ ,  $\omega = p + iq$  ( $a, b, p, q \in \mathbf{R}$ ) のとき,

$$\begin{aligned} z(t) &= \alpha e^{\omega t} = (a + ib) e^{(p+iq)t} = (a + ib) e^{pt} (\cos qt + i \sin qt) \\ &= e^{pt} \{ a \cos qt - b \sin qt + i(b \cos qt + a \sin qt) \} \\ &= e^{pt} (a \cos qt - b \sin qt) + i e^{pt} (b \cos qt + a \sin qt) \\ &= x(t) + i y(t) \end{aligned}$$

となるから  $x(t) = e^{pt} (a \cos qt - b \sin qt)$  また  $y(t) = e^{pt} (b \cos qt + a \sin qt)$  . //

演習問題 1 略解

1)  $|z| = |\alpha| = 1, z \neq \alpha$  であるから,  $\bar{\alpha}z \neq 1$  ( $\because \bar{\alpha}z = 1$  ならば  $z = \frac{1}{\bar{\alpha}} = \alpha$  となり矛盾.)

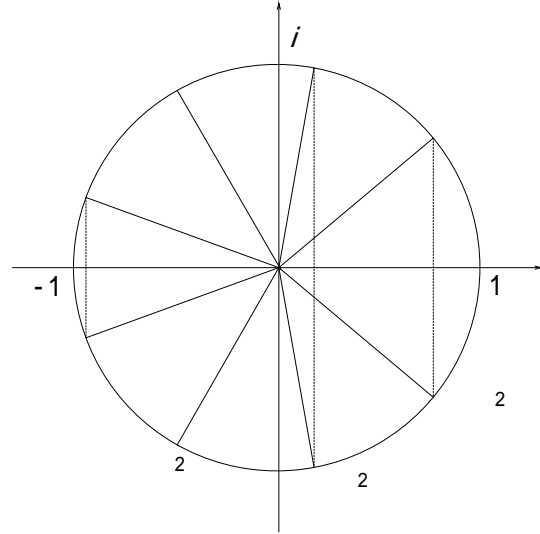
$$\left| \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right|^2 = \frac{(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{(1 - \bar{\alpha}z)(1 - \alpha\bar{z})} = \frac{z\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}}{1 + \alpha\bar{\alpha}z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}} = \frac{2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}}{2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z}} = 1$$

が成り立つ.

2) (1) ド・モワブルの定理から,

$$\sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = \left( e^{\frac{2\pi}{3}i} \right)^{\frac{1}{3}} = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2.$$

$$\sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}} = \left( e^{\frac{4\pi}{3}i} \right)^{\frac{1}{3}} = \beta, \beta\omega, \beta\omega^2.$$



(2)  $1 + \omega + \omega^2 = 0, \omega^3 = 1$  に注意して,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta\omega^2)(\alpha\omega + \beta\omega)(\alpha\omega^2 + \beta) &= \omega^3\alpha^3 + (\beta\omega + \beta\omega^5 + \beta\omega^3)\alpha^2 + (\beta^2\omega + \beta^2\omega^3 + \beta^2\omega^5)\alpha + \beta^3\omega^3 \\ &= \alpha^3 + \beta^3 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &(\alpha + \beta\omega^2)(\alpha\omega + \beta\omega) + (\alpha\omega + \beta\omega)(\alpha\omega^2 + \beta) + (\alpha\omega^2 + \beta)(\alpha + \beta\omega^2) \\ &= (\omega + \omega^3 + \omega^2)\alpha^2 + (\omega^3 + \omega + \omega^2)\beta^2 + (\omega + \omega^3 + \omega + \omega^3 + \omega^4 + 1)\alpha\beta \\ &= 3(1 + \omega)\alpha\beta = -3\omega^2\alpha\beta = -3e^{\frac{4\pi}{3}i}e^{\frac{2\pi}{9}i}e^{\frac{4\pi}{9}i} = -3e^{2\pi i} = -3. \end{aligned}$$

(4) 上で示したことから, 方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  の解と係数の関係から

$$(x - \alpha - \beta\omega^2)(x - \alpha\omega - \beta\omega)(x - \alpha\omega^2 - \beta) = x^3 - 3x + 1$$

が成り立っている. 故に, 方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  は実数

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\omega^2 &= e^{\frac{2\pi}{9}i} + e^{\frac{4\pi}{9}i}e^{\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{9}i} + e^{\frac{16\pi}{9}i} = e^{\frac{2\pi}{9}i} + e^{-\frac{2\pi}{9}i} = 2\cos\frac{2\pi}{9}, \\ \alpha\omega + \beta\omega &= 2\cos\frac{8\pi}{9}, \\ \alpha\omega^2 + \beta &= 2\cos\frac{4\pi}{9} = 2\sin\frac{\pi}{18} \end{aligned}$$

を解とする.

(5) 方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  有理数解を持つと仮定すると、整数の素因数分解の一意性に矛盾することが容易に示される。 //

□ (1)  $e^{i\theta}$  を考えると、

$$\begin{aligned} \cos^n \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n {}_n C_k e^{i(n-k)\theta} e^{-ik\theta} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n {}_n C_k e^{i(n-2k)\theta} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n {}_n C_k \left( \cos(n-2k)\theta + i \sin(n-2k)\theta \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cos(n-2k)\theta + \frac{i}{2^n} \sum_{k=0}^n {}_n C_k \sin(n-2k)\theta \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n {}_n C_k \cos(n-2k)\theta. \quad \left( \text{このとき, } \sum_{k=0}^n {}_n C_k \sin(n-2k)\theta = 0. \right) \end{aligned}$$

(2)  $n = 2m$  のとき

$$\begin{aligned} \cos n\theta + i \sin n\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n \\ &= \sum_{k=0}^m {}_n C_{2k} \cos^{n-2k} \theta i^{2k} \sin^{2k} \theta + \sum_{k=0}^{m-1} {}_n C_{2k+1} \cos^{n-2k-1} \theta i^{2k+1} \sin^{2k+1} \theta \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k {}_n C_{2k} \cos^{n-2k} \theta \sin^{2k} \theta + i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k {}_n C_{2k+1} \cos^{n-2k-1} \theta \sin^{2k+1} \theta. \\ \therefore \cos n\theta &= \sum_{k=0}^m (-1)^k {}_n C_{2k} \cos^{n-2k} \theta \sin^{2k} \theta \end{aligned}$$

(4)  $z = \cos \theta + i \sin \theta$  を考えると、

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

であるから

$$\begin{aligned} 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta &= \operatorname{Re} \left\{ 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \right\} = \operatorname{Re} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \\ &= \operatorname{Re} \frac{(1 - z^{n+1})(1 - \bar{z})}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \operatorname{Re} \frac{1 - \bar{z} - z^{n+1} + z^{n+1}\bar{z}}{1 - z - \bar{z} + z\bar{z}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 - \bar{z} - z^{n+1} + z^n}{2 - z - \bar{z}}. \end{aligned}$$

さて、

$$2 - z - \bar{z} = 2(1 - \cos \theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

また

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 - \bar{z} - z^{n+1} + z^n \right\} = 1 - \cos \theta - \cos(n+1)\theta + \cos n\theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \sin \frac{\theta}{2}$$

であるから、

$$\therefore 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \quad //$$

4 (1)  $w - wz = 1$  より  $z = \frac{w-1}{w}$  が成り立ち,  $z\bar{z} = 1$  より

$$\frac{w-1}{w} \frac{\bar{w}-1}{\bar{w}} = 1$$

が成り立つ. このとき

$$(w-1)(\bar{w}-1) = w\bar{w}$$

より

$$w + \bar{w} = 1$$

を得る. これは,  $w$  が直線  $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$  上にあることを意味しているから,  $z$  が単位円周上を動くとき  $w = \frac{1}{1-z}$  は直線  $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$  を描く.

(別解) 一次変換  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  による円の像は円または直線であることがわかっている. 単位円周上の点  $z \neq 1$  が 1 に近づくとき, その像  $\frac{1}{1-z}$  は複素数の平面  $\mathbb{C}$  上で無限に遠ざかる ( $\frac{1}{1-z} \rightarrow \infty (z \rightarrow 1)$ ) から, 一次変換  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  による単位円の像は直線である (円ではあり得ない). 単位円周上の点  $-1$  と  $i$  の像は  $f(-1) = \frac{1}{2}$  と  $f(i) = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$  を通るから, 求める直線は  $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$  である. //

(2)  $w - wz = 1$  より  $z = \frac{w-1}{w}$  が成り立ち,  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z = 1$  より

$$\frac{w-1}{w} + \frac{\bar{w}-1}{\bar{w}} = 1$$

が成り立つ. このとき

$$\bar{w}(w-1) + w(\bar{w}-1) = w\bar{w}$$

から

$$w\bar{w} - \bar{w} - w = 0$$

を得る. これは,  $w$  が円  $(w-1)(\bar{w}-1) = 1$  上にあることを意味しているから,  $w = \frac{1}{1-z}$  は中心 1 半径 1 の円を描く.

(3) (1) と同様な計算から,  $z$  が中心 0 半径 2 の円周上を動くとき  $w$  は中心  $-\frac{1}{3}$  半径  $\frac{2}{3}$  の円を描くことがわかる. //

5 (1)  $n = 2, 3, \dots$  に対して,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k\pi}{n}i} &= e^{\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n-1} k\pi)i} = e^{\frac{(n-1)\pi}{2}i} = \cos \frac{(n-1)\pi}{2} + i \sin \frac{(n-1)\pi}{2} \\ &= \begin{cases} \cos(p - \frac{1}{2})\pi + i \sin(p - \frac{1}{2})\pi = -i \cos p\pi & (n = 2p) \\ \cos p\pi + i \sin p\pi = \cos p\pi & (n = 2p + 1) \end{cases} \\ &= i^{n-1}. \end{aligned}$$

(2)  $n = 2, 3, \dots$  に対して,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{n-1} \left( \frac{e^{\frac{k\pi}{n}i} - e^{-\frac{k\pi}{n}i}}{2i} \right) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \left\{ \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k\pi}{n}i} \right\} \left\{ \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-\frac{2k\pi}{n}i}) \right\}.$$

1.4 複素数の極表示と指数関数 例 から,  $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-\frac{2k\pi}{n}i}) = n$  が導かれるので,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{(2i)^{n-1}} i^{n-1} n = \frac{n}{2^{n-1}}. \quad //$$

[6]  $n$  次代数方程式  $p(z) = 0$  の複素数解のうちの実数解を  $b_1, b_2, \dots, b_r$  とする.  $n$  次代数方程式  $p(z) = 0$  の真の複素数解とその役複素数解を  $\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_2, \dots, \alpha_s, \bar{\alpha}_s$  とする. 命題 1.3.1 により,  $r + 2s = n$  である. 因数定理により, 実数係数の一次式  $z - b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) と実数係数の二次式  $(z - \alpha_i)(z - \bar{\alpha}_i) = z^2 + c_i z + d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) の積

$$a_n(z - b_1)(z - b_2) \cdots (z - b_r)(z^2 + c_1 z + d_1)(z^2 + c_2 z + d_2) \cdots (z^2 + c_s z + d_s)$$

は  $n$  次多項式  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$  に等しい. //

[7] 1.8 応用 から, 実数係数の微分方程式  $y'' + \mu y' + \nu y = 0$  の解  $y = y(x)$  は二次方程式  $x^2 + \mu x + \nu = 0$  の解  $\omega = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\nu}}{2}$  に結びついていることがわかる.

(1)  $\mu^2 - 4\nu < 0$  の場合.  $\omega = \frac{-\mu \pm i\sqrt{4\nu - \mu^2}}{2}$  であるから, 問題 1.8.1 略解 より

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{\mu x}{2}} \sin \frac{\sqrt{4\nu - \mu^2}}{2} x + c_2 e^{-\frac{\mu x}{2}} \cos \frac{\sqrt{4\nu - \mu^2}}{2} x = c e^{-\frac{\mu x}{2}} \sin \left( \frac{\sqrt{4\nu - \mu^2}}{2} x + \phi \right),$$

ただし  $\cos \phi = \frac{c_1}{c}, \quad \sin \phi = \frac{c_2}{c}, \quad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (c, c_1, c_2, \phi \in \mathbf{R}).$

(2)  $\mu^2 - 4\nu = 0$  の場合.  $\omega = \frac{-\mu}{2}$  であるから, 問題 1.8.1 略解 より  $y(x) = e^{-\frac{\mu x}{2}}$  が得られるが, この場合には  $y(x) = x e^{-\frac{\mu x}{2}}$  も解である (微分方程式に代入して示せ). 従って

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{\mu x}{2}} + c_2 x e^{-\frac{\mu x}{2}} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}).$$

(3)  $\mu^2 - 4\nu > 0$  の場合.  $\omega = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\nu}}{2}$  であるから, 問題 1.8.1 略解 より

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\nu}}{2} x} + c_2 e^{-\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\nu}}{2} x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R}). \quad //$$



問題 2.1.1 略解. 問題 1.3.6 から,

$$1 - (n+1)z^n + nz^{n+1} = (1-z)^2(1+2z+3z^2+\cdots+kz^{k-1}+\cdots+nz^{n-1})$$

が成り立っていることがわかる. 複素数  $z$  が  $|z| < 1$  を満たすとき,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1}{(1-z)^2} \quad (\because \lim_{n \rightarrow \infty} nz^{n-1} = 0) \quad // \end{aligned}$$

問題 2.1.3 略解.  $\frac{4-2i}{5}$

問題 2.2.3 略解. (1)  $\left\{1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right\}' = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!},$

$$\left\{1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right\}'' = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}.$$

(2)  $\left\{1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right\}' = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!},$

$$\left\{1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right\}'' = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots+\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}.$$

(3)  $\left\{\frac{1}{1-z}\right\}' = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad \left\{\frac{1}{1-z}\right\}'' = \frac{2}{(1-z)^3}.$

問題 2.2.6 略解. (1)  $z = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (n \in \mathbf{Z})$  (2)  $z = n\pi \quad (n \in \mathbf{Z})$

(3)  $z = \frac{\log 1}{2} = n\pi i \quad (n \in \mathbf{Z})$  (4)  $z = \frac{\log(-1)}{2} = \frac{(2n+1)\pi i}{2} \quad (n \in \mathbf{Z}).$

問題 2.2.7 略解. (1)  $w' = -\frac{2i}{(i+z)^2}, \quad u = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(1+y)^2}, \quad v = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2}.$

(2)  $w' = -\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}, \quad u = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cos \frac{y}{x^2+y^2}, \quad v = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \sin \frac{y}{x^2+y^2}.$

(3)  $w' = e^z(\sin z + \cos z), \quad u = e^x(\sin x \cos y \cosh y - \cos x \sin y \sinh y),$   
 $v = e^x(\sin x \sin y \cosh y + \cos x \cos y \sinh y).$

問題 2.5.3 略解. (1)  $\int_C \frac{1}{z+i} dz = 0, \quad \int_C \frac{1}{z-i} dz = 2\pi i,$

$\int_C \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i} \int_C \left\{ \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right\} dz = \pi.$  (2)  $L_R: z = r \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad (0 \leq r \leq R)$  より,

$$\int_{L_R} e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-ir^2} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} dr = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^R \cos r^2 dr - i \int_0^R \sin r^2 dr \right\}.$$

## 演習問題 2

### 略解

1 コーシー・リーマン方程式より,  $|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$  を示せ.

2 (1) 複素数  $z = x + iy$  が  $\operatorname{Re} z = x_0$  の直線上を動くとき,  $w = \cos z = u + iv$  と置くと

$$w = \cos z = \cos(x_0 + iy) = \cos x_0 \cos(iy) - \sin x_0 \sin(iy) = \cos x_0 \cosh y - i \sin x_0 \sinh y$$

が成り立つから,

$$\begin{cases} u = \cos x_0 \cosh y \\ v = -\sin x_0 \sinh y. \end{cases}$$

そしてこのことから,

(a)  $x_0 \neq \frac{n\pi}{2}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) のとき

$$w = \cos z \text{ は双曲線 } \frac{u^2}{\cos^2 x_0} - \frac{v^2}{\sin^2 x_0} = 1 \text{ (= } \cosh^2 y - \sinh^2 y \text{) 上にある.}$$

(b)  $\cos x_0 = 0$ , すなわち,

$$x_0 = \frac{(2n+1)\pi}{2} \text{ (} n \in \mathbf{Z} \text{) のとき}$$

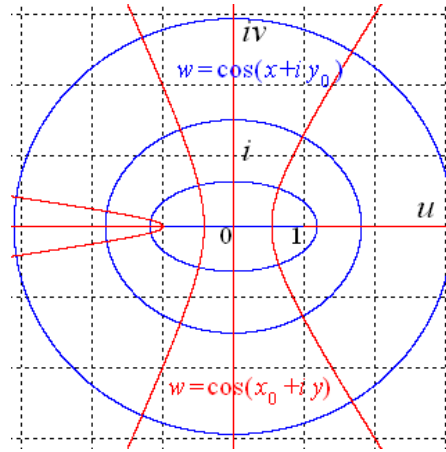
$w = \cos z$  は直線  $u = 0$  上にある.

(c)  $\sin x_0 = 0$ , すなわち,

$$x_0 = n\pi \text{ (} n \in \mathbf{Z} \text{) のとき}$$

$w = \cos z$  は直線  $v = 0$  上にあり,

$$\text{この場合 } \begin{cases} u \geq 1 & (x_0 = 2n\pi) \\ u \leq -1 & (x_0 = (2n+1)\pi). \end{cases}$$



(2) 複素数  $z$  が  $\operatorname{Im} z = y_0$  の直線上を動くとき,

$$w = \cos z = \cos(x + iy_0) = \cos x \cos(iy_0) - \sin x \sin(iy_0) = \cos x \cosh y_0 - i \sin x \sinh y_0$$

が成り立つから,

$$\begin{cases} u = \cos x \cosh y_0 \\ v = -\sin x \sinh y_0. \end{cases}$$

さて  $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq 1$  ( $y \in \mathbf{R}$ ) であるから,

(a)  $\sinh y_0 \neq 0$ , すなわち,  $y_0 \neq 0$  のとき

$$w = \cos z \text{ は楕円 } \frac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1 \text{ (= } \cos^2 y + \sin^2 y \text{) 上にある.}$$

(b)  $\sinh y_0 = 0$ , すなわち,  $y_0 = 0$  のとき

$$w = \cos z \text{ は直線 } v = 0 \text{ 上にある (この場合 } -1 \leq u \leq 1 \text{)}. \quad //$$

$$\begin{aligned}
\boxed{4} \quad (1) \quad & \left\{ \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, z \right\} = 0 & (2) \quad & \{e^{cz}, z\} = -\frac{c^2}{2} \\
(3) \quad & \{cz^n, z\} = -\frac{n^2 - 1}{2z^2} & (4) \quad & \{\cos cz, z\} = -c^2 - \frac{3c^2}{2} \cot^2 cz \\
(5) \quad & \{\tan cz, z\} = 2c^2 & (6) \quad & -\frac{1}{z^2}.
\end{aligned}$$

問題 3.1.1 略解.  $|c| \leq 2$  としてある番号  $N (\geq 1)$  で  $|f_c^N(0)| > 2$  となっているとする.

各  $f_c^n(0)$  を複素数  $\delta_n$  によって  $f_c^n(0) = 2\delta_n$  ( $n = N, N+1, N+2, \dots$ ) と表すと,

$$\begin{aligned}
f_c^N(0) &= 2\delta_N \\
|\delta_N| &> 1, \\
f_c^{N+1}(0) &= f_c(f_c^N(0)) = (2\delta_N)^2 + c = 4\delta_N^2 + c = 2\delta_{N+1} \\
|\delta_{N+1}| &= \frac{|4\delta_N^2 + c|}{2} \geq \frac{4|\delta_N|^2 - |c|}{2} \geq \frac{2|\delta_N|^2 + 2|\delta_N|^2 - 2}{2} \geq |\delta_N|^2, \\
f_c^{N+2}(0) &= f_c(f_c^{N+1}(0)) = (2\delta_{N+1})^2 + c = 4\delta_{N+1}^2 + c = 2\delta_{N+2} \\
|\delta_{N+2}| &= \frac{|4\delta_{N+1}^2 + c|}{2} \geq \frac{4|\delta_{N+1}|^2 - |c|}{2} \geq \frac{2|\delta_{N+1}|^2 + 2|\delta_{N+1}|^2 - 2}{2} \geq |\delta_{N+1}|^2 \geq |\delta_N|^4, \\
&\vdots \\
f_c^{N+k}(0) &= f_c(f_c^{N+k-1}(0)) = (2\delta_{N+k-1})^2 + c = 4\delta_{N+k-1}^2 + c = 2\delta_{N+k} \\
|\delta_{N+k}| &= \frac{|4\delta_{N+k-1}^2 + c|}{2} \geq \frac{4|\delta_{N+k-1}|^2 - |c|}{2} \geq \frac{2|\delta_{N+k-1}|^2 + 2|\delta_{N+k-1}|^2 - 2}{2} \geq |\delta_{N+k-1}|^2 \geq |\delta_N|^{2^k}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2|\delta_n| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 2|\delta_N|^{2^{n-N}} = \infty \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) = \infty$$

が成り立つ. //

問題 3.1.3 略解. 関数  $z = \varphi(w) = w - w^2$  による, 中心 0 半径  $\frac{1}{2}$  の円

$\gamma = \left\{ w \in \mathbf{C} \mid |w| = \frac{1}{2} \right\}$  の像を求める.  $w = u + iv \in \mathbf{C}$  に対して,

$$z = w - w^2 = u + iv - (u + iv)^2 = u - u^2 + v^2 + i(v - 2uv)$$

であるから,  $w = u + iv = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta) \in \Gamma$  のとき, 曲線は

$$\begin{cases} x = u - u^2 + v^2 = \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\cos^2 \theta}{4} + \frac{\sin^2 \theta}{4} = \frac{\cos \theta}{2} - \frac{\cos 2\theta}{4} \\ y = v - 2uv = \frac{\sin \theta}{2} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \quad (-\pi < \theta \leq \pi). \end{cases}$$

とパラメーター表示できる．この曲線は，

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(\theta - \pi)}{2} - \frac{\cos 2(\theta - \pi)}{4} = -\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\cos 2\theta}{4} = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \\ y = \frac{\sin(\theta - \pi)}{2} - \frac{\sin 2(\theta - \pi)}{4} = -\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta \end{cases} \quad (0 < \theta \leq 2\pi).$$

とパラメーター表示できるから，極方程式  $r = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$  で与えられるカーディオイドを  $y$  軸に関して折り返した後  $+\frac{1}{4}$  だけ右に平行移動したものである． //

問題 3.1.4 [命題 3.1.2 (2) の証明の完成] さて，

$$z \in A \quad \text{ならば,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{2n}(z) = w \quad \text{よりある番号 } n \text{ で } f_c^{2n}(z) \in \Delta(w, \delta)$$

が成り立つから

$$A \subset \bigcup_{n=0,1,2,\dots} f_c^{-2n}(\Delta(w, \delta)), \quad \text{ただし } f_c^{-2n}(\Delta(w, \delta)) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f_c^{2n}(z) \in \Delta(w, \delta) \right\}.$$

また，

$$z \in f_c^{-2n}(\Delta(w, \delta)) \quad \text{ならば,} \quad f_c^{2n}(z) \in \Delta(w, \delta) \quad \text{より} \quad f_c^{2n+2}(z) \in A$$

となるので

$$f_c^{-2n}(\Delta(w, \delta)) \subset A \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成り立つ．こうしてつぎの事が示された：

$$A = \bigcup_{n=0,1,2,\dots} f_c^{-2n}(\Delta(w, \delta)) \quad \text{が成り立ち, } A \text{ は } (\mathbb{C} \text{ の}) \text{ 開集合である.}$$

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_c^{2n}(z) = w \right\} \quad \text{に対して} \quad f_c^2(A) \subset A \quad \text{と} \quad f_c^{-2}(A) = (f_c^2)^{-1}(A) \subset A \quad \text{は明らかであるから,}$$

$$f_c^2(A) \subset A = f_c^{-2}(A)$$

が成り立つ．実は，任意の  $z \in A$  に対して

$$f_c^{-2}(z) = (f_c^2)^{-1}(z) = \sqrt{\sqrt{z-c}-c} \neq \emptyset \quad \text{空集合}$$

であるから，関数  $f_c(z)$  の下での完全不変性

$$f_c^2(A) = A = f_c^{-2}(A)$$

が成り立つ．先に述べた (問題 3.1.1) ように  $A \subset \overline{\Delta}(0, 2) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$  となってい

る． $c = -1 - w - w^2$  が  $A$  に含まれるか否かを調べてみよう．今， $c \notin A$  と仮定する．

このとき， $(\mathbb{C} \text{ の開集合}) A$  に含まれる半径  $r > 0$  中心  $w$  の閉円板  $\overline{\Delta}(w, r)$  をとると，

$$f_c^{2n} : A \longrightarrow A$$

の逆関数の分枝

$$\begin{cases} g_n = (f_c^{2n})^{-1} : \overline{\Delta}(w, r) \longrightarrow A \subset \Delta(0, 2) \\ g_n(w) = w \end{cases}$$

が正則関数として取れる（厳密には， $f_c^2 : A \longrightarrow A$  が  $A$  の被覆になっていることからわかる。）

このとき  $g_n$  の  $w$  での微分係数はコーシーの評価式により

$$|\{g_n\}'(w)| \leq \frac{2}{r} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たす．一方

$$f_c^{2n}(g_n(z)) = z \quad (z \in \Delta(w, r))$$

であるから，

$$\{f_c^{2n}\}'(w)\{g_n\}'(w) = 1 \quad \text{すなわち} \quad \{g_n\}'(w) = \frac{1}{\{f_c^{2n}\}'(w)}$$

が成り立つ．

$$|\{f_c^2\}'(w)| = \lambda < 1$$

より

$$\begin{aligned} |\{f_c^{2n}\}'(w)| &= |\{f_c^{2n-2}(w)\}'\{f_c^2\}'(w)| \\ &\vdots \\ &= |\{f_c^2\}'(w)|^n = \lambda^n \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$|\{g_n\}'(w)| \longrightarrow \infty \quad (n \longrightarrow \infty).$$

これは矛盾である．こうして  $c \in A$  が示された． $f_c(0) = c$  であることから， $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(0) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(c) \neq \infty$  が成り立ち  $c \in M$  がわかる．こうして

$$\left\{ -1 - w - w^2 \in \mathbf{C} \mid |w + w^2| < \frac{1}{4} \right\} \subset M \quad \text{が示される. //}$$

## おわりに

代数方程式や関数の方程式で現される現象を調べる場合に、複素数の範囲で問題を考えることが数学に本質的な前進をもたらしたことを知ってほしい。というわけでしたが、もっと複素数をふくむ計算の準備が必要という声に応えて、または、さらに前進したいという声に応えて手に入れやすい参考文献を二つ挙げておきます。

## 関連図書

- [1] 山本稔・坂田定久共著 複素解析へのアプローチ、裳華房. ISBN4-7853-1076-6
- [2] 志賀啓成著 複素解析学 II 現代理論への序説、数学レクチャーノート入門編 6, 培風館, 1997.  
ISBN4-563-00636-X C3341

### 2.2 写像の反復 マンデルブロー集合 $M$ の図は

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/mitsu/gallery/M-zoom-j.html> から引用した .

# 索引

## あ～そ

Apollonius の円	78
一次分数関数	17
Eneström-Kakeya の定理	10
$\epsilon - N$ 論法	65
1 の $n$ 乗根	13
円	14,15
円周等分方程式	13
オイラー (Euler) の公式	11
回転	3,14, 19
解と係数の関係	8
カージオイド Cardioid	15,61
関数の連続性	31
吸引不動点	62
極限值	29,30,31
共役複素数	4,8
曲線の接線	41,42
曲線の向き	48
虚数	1
虚数単位	1
虚部	1,4,5
Green の公式	49,54,55
高階導関数	32
コーシー・リーマン方程式	35,54
Cauchy-Riemann Equations	35,53
コーシー の積分定理	54
コーシー の積分公式	55
コーシー の積分表示式	57
コーシー の判定条件	66
コーシー の評価式	57
コーシー の不等式	6
コーシー列	66
合成関数	31,32,34,59
恒等的に等しい	7
交流回路	25
三角関数	38
三角不等式	5
$C^1$ 級	35,54,69
指数関数 $e^z$	11
実数の全体 (集合), 実数直線 $\mathbb{R}$	2
自然数の集合 $\mathbb{N}$	2
実部	1,5
写像	17
収束	29,65
純虚数	2
整数の集合 $\mathbb{Z}$	2
正則関数	33
接線	40
絶対値	5
線形性	34,49
線積分	48
相似縮小	19

## た～わ

代数学の基本定理	7
代数方程式	7
多項式の因数定理	7
多項式の因数分解	8
多項式の剰余定理	7
直線	14
中線定理	5
等角写像	42
等角写像性	40
等比級数	30
ド・モワブル (de Moivre) の公式	3
二次関数	15
二次曲線の極表示	16
二次多項式	10
反転	19
反復	59
パラメータ表示	40
微分方程式	24,27
複素数体	1,2
複素数の幾何学的表現	2
複素数の極表示	2
複素数の全体 (集合) $\mathbb{C}$	1
複素数の相等	1
複素数の平面 $\mathbb{C}$	2
複素数のべき乗根	12
複素数の偏角	2,3
複素数列	29,65
複素積分	51
複素微分可能性	33
複素微分係数	33
拡張された複素数平面 $\overline{\mathbb{C}}$	18
不定元	7
平行移動	19
平方根	9
変数	7
マンデルブロー集合	60
無限級数	29
無限級数の和	29
面積	55
有理関数	32, 34
Lagrange の補間公式	10
リーマン球	19
領域	20
連続性	31





